

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ ДВУХ ПАР ФУНКЦИЙ

Л.А. Хвощинская

Пусть при обходе вокруг точек a_1, a_2, a_3, ∞ комплексной плоскости вектор-функция $Y(z) = (y_1(z), y_2(z))$ испытывает линейное преобразование с помощью постоянных невырожденных матриц V_k , $k = 1, \dots, 4$, $V_1 V_2 V_3 V_4 = E$, т.е. $Y \rightarrow V_k Y$. Матрицы V_1, V_2, V_3, V_4 образуют группу монодромии.

Рассматривается невырожденный случай, когда матрицы V_1, V_2, V_3 не приводятся одним преобразованием подобия к треугольному виду. При решении задачи применяется «метод логарифмирования произведения матриц» (см. [1]).

Обозначим через α_k и β_k характеристические числа матриц V_k , $k = 1, \dots, 4$; $\alpha_{j,j+1}$, $\beta_{j,j+1}$ – характеристические числа матриц $V_j V_{j+1}$, $j = 1, 2$, а $\rho_k = (2\pi i)^{-1} \ln \alpha_k$, $\sigma_k = (2\pi i)^{-1} \ln \beta_k$, $\rho_{j,j+1} = (2\pi i)^{-1} \ln \alpha_{j,j+1}$, $\sigma_{j,j+1} = (2\pi i)^{-1} \ln \beta_{j,j+1}$. Здесь ветви логарифмов выбраны из условий $|\operatorname{Re}(\rho_k - \sigma_k)| < 1$, $|\operatorname{Re}(\rho_{j,j+1} - \sigma_{j,j+1})| < 1$, причем $\sum_{k=1}^4 (\rho_k + \sigma_k) = 1$ (соотношение Фукса),

$$\rho_{12} + \sigma_{12} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2, \quad \rho_{23} + \sigma_{23} = \rho_2 + \sigma_2 + \rho_3 + \sigma_3.$$

Числа ρ_{13}, σ_{13} находим из системы уравнений

$$\rho_{13} + \sigma_{13} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_3 + \sigma_3,$$

$$\rho_4(\sigma_4 - 1) = \rho_{12}\sigma_{12} + \rho_{23}\sigma_{23} + \rho_{13}\sigma_{13} - \rho_1\sigma_1 - \rho_2\sigma_2 - \rho_3\sigma_3.$$

В общем случае решение задачи в окрестности каждой особой точки a_k имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^3 (z - \alpha_k)^{\rho_k} D_k \begin{pmatrix} u_k(z) \\ v_k(z) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, 3,$$

где D_k – матрица, приводящая матрицу V_k к нормальной жордановой форме, $u_k(z)$, $v_k(z)$ – фундаментальная система решений дифференциального уравнения Фукса второго порядка

$$\begin{aligned} u'' + \left(\sum_{k=1}^3 \frac{1 + \rho_k - \sigma_k}{z - \alpha_k} - \frac{1}{z - b} \right) u' + \\ + \left(\prod_{k=1}^3 (z - \alpha_k) \right)^{-1} \left(\rho \sigma z - b \rho - \sum_{k=1}^3 \tau_k \alpha_k + \frac{q}{z - b} \right) u = 0, \end{aligned}$$

$\rho = \sum_{k=1}^4 \rho_k$, $\sigma = \sigma_4 + \sum_{k=1}^3 \rho_k$, $\tau_1 = \rho_{23}\sigma_{23} - (\rho_2 + \rho_3)(\sigma_2 + \sigma_3)$, $\tau_2 = \rho_{13}\sigma_{13} - (\rho_1 + \rho_3)(\sigma_1 + \sigma_3)$, $\tau_3 = \rho_{12}\sigma_{12} - (\rho_1 + \rho_2)(\sigma_1 + \sigma_2)$, а акцессорные параметры явно выражаются через параметры ρ_k , σ_k ($k = 1, \dots, 4$), $\rho_{j,j+1}$, $\sigma_{j,j+1}$ ($j = 1, 2$) и точки a_1, a_2, a_3 .

Исследования показали, что если матрица D_4 приводящая матрицу V_4 к нормальной жордановой форме, приводит какую-либо матрицу V_k ($k = 1, 2, 3$) к треугольному виду, то $b = a_k$, $q = 0$, и дифференциальное уравнение упрощается. В частности, имеет место



Утверждение. Если матрица D_4 приводит матрицу V_1 к треугольному виду, то фундаментальное уравнение (1) в окрестности точки a_1 имеет вид

$$u_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z - a_1)^n, \quad v_1(z) = (z - a_1)^{1+\sigma_1-\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z - a_1)^n,$$

а коэффициенты A_n , B_n рядов находится из рекуррентных соотношений

$$A_{n+1} = \frac{1}{p'_n}(r_n A_n + s_n A_{n-1}), \quad B_{n+1} = \frac{1}{p'_n}(r'_n A_n + s'_n B_{n-1}),$$

где

$$p_n = (n+1)(\rho_1 - \sigma_1 + n), \quad p'_n = (n+1)(2 + \sigma_1 - \rho_1 + n),$$

$$r_n = \sum_{j=2}^3 \frac{(\rho_{1j} - \rho_1 - \rho_j + n)(\sigma_{1j} - \rho_1 - \rho_j + n)}{a_1 - a_j},$$

$$r'_n = \sum_{j=2}^3 \frac{(\rho_{1j} - \sigma_1 - \rho_j + n + 1)(\sigma_{1j} - \sigma_1 - \rho_j + n + 1)}{a_1 - a_j},$$

$$s_n = \frac{(\rho + n - 1)(\sigma + n - 1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \quad s'_n = \frac{(\rho + \sigma_1 - \rho_1 + n - 1)(\sigma_1 + \sigma_1 - \rho_1 + n - 1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}.$$

Аналогичные утверждения имеют место и в случаях, когда матрица D_4 приводит матрицу V_2 или V_3 к треугольному виду.

Литература

1. Хвоцинская Л.А. О применении логарифмирования произведения матриц к решению проблемы Римана // Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-28): сб. тр. XXVII Междунар. науч. конф. Т. 7. Рязань, 2015. С. 28–31.

