О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Б. Чжан

Если для уравнения
$$P(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y) = 0, \tag{1}$$
где $P(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y)$ – полином с постоянными коэффициентами, искать решение в виде ряда Лорана
$$y = h_0 t^{-s} + \ldots + h t^{r-s} + \ldots, \quad t = z - z_0, \quad s \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$
то для однозначности решений уравнения (1), согласно работам [1–3], резонансы r должны быть целыми и различными, причем один из них равен -1 [2]. Решениям вида (2) будем сопоставлять наборы
$$(s; h_0; -1, r_1, \ldots, r_{n-1}). \tag{3}$$

В работе [4] приведен класс дифференциальных уравнений третьего порядка, удовлетворяющих необходимым условиям наличия свойства Пенлеве. Однако семь уравнений с целыми резонансами в [4] отсутствуют. Запишем эти уравнения с соответствующими наборами вида (4):
$$y''' = 2\frac{y'y''}{y} - \frac{(y')^3}{y^2} + 3y^2y', \quad (1; \alpha; -1, 2, 3), \quad \alpha^2 = 1; \tag{4}$$
$$y''' = \frac{y'y''}{y} + yy'' + 2y^2y', \quad (1; -1; -1, 2, 3), \quad (1; 2; -1, 2, 6); \tag{5}$$
$$y''' = 3\frac{y'y''}{y} - 6yy', \quad (2; 1; -1, -2, 6); \tag{6}$$
$$y''' = 5\frac{y'y''}{y} - 4\frac{(y')^3}{y^2} - 2yy', \quad (2; 1; -1, -2, 2); \tag{7}$$
$$y''' = 6\frac{y'y''}{y} - 6\frac{(y')^3}{y^2} - 6y^2, \quad (3; 1; -1, -2, -3); \tag{8}$$
$$y''' = 4\frac{y'y''}{y} - 2\frac{(y')^3}{y^2} + 30y^2, \quad (3; 1; -1, -5, 6); \tag{9}$$
$$y'y''' = yy'y'' + 4(y')^3 + \gamma y^2(yy'' - 2(y')^2),$$
$$(1; -1; -1, 2, 3) \ (\gamma = 1), \quad (1; -1; -1, 1, 6) \ (\gamma = -1), \quad (1; -1; -1, -2, -3) \ (\gamma = 11). \tag{10}$$

Теорема 1. *Уравнения (4)–(9) имеют соответственно первые интегралы*
$$y'' = \frac{(y')^2}{y} + y^3 + C, \quad \frac{y''}{y} = y' + y^2 + C, \quad \frac{y''}{y^3} = \frac{6}{y} + C,$$
$$\frac{y''}{y^3} = \frac{(y')^2}{y^4} + \frac{2}{y} + C, \quad y'' = 2\frac{(y')^2}{y} - 6(z - C)y^2,$$
$$3(yy'y'' - 2(y')^3 - 30y^4)^2 + 2(yy'' - 2(y')^2)^3 = Cy^6,$$

где произвольная постоянная интегрирования C отвечает соответственно резонансам

$$r = 3, \quad r = 2, \quad r = -2, \quad r = -2, \quad r = -1, \quad r = 6.$$

Замечание 2. В работе [5] содержатся уравнения (4)–(9), где показано, что решения их мероморфны.

Теорема 2. *Общие решения уравнений (4), (5) мероморфны.*

В справедливости теоремы 2 убеждаемся, заметив, что первые интегралы уравнений (4), (5) являются уравнениями второго порядка типа Пенлеве [6, с. 446, с. 450]. Решения указанных уравнений не имеют других подвижных особенностей, кроме однозначных полюсов.

Теорема 3. *Общее решение уравнения (10) имеет логарифмические точки ветвления.*

Доказательство теоремы 3 основано на теореме из [7] о разложении решений уравнения, содержащего малый параметр при старшей производной, по степеням этого параметра.

Теорема 4. *Уравнения (6) и (7) имеют двухпараметрическое рациональное решение*

$$y = \frac{1}{(z - z_0)^2 - h}, \quad \forall z_0, h; \tag{11}$$

уравнение (9) имеет двухпараметрическое рациональное решение

$$y = \frac{(z - z_0)^2}{(z - z_0)^5 - h}, \quad \forall z_0, h. \tag{12}$$

В справедливости теоремы 4 убеждаемся непосредственной подстановкой функции (11) в уравнения (6) и (7), а функции (12) – в (9).

Литература

1. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. *A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I* // J. Math. Phys. 1980. V. 21. № 4. P. 715–721.

2. Мартынов И.П. *О дифференциальных уравнениях с подвижными критическими особыми точками* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 10. С. 1780–1791.

3. Андреева Т.К., Мартынов И.П., Пронько В.А. *О нулевых резонансах обыкновенных дифференциальных уравнений* // Весн. Гродзенскага дзярж. ўн-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2010. Т. 102. № 3. С. 29–36.

4. Mugan U., Jrad F. *Non-polynomial third order equations which pass the Painleve test* // Z. Naturforsch. A. 2004. V. 59a. № 3. P. 163–180.

5. Ванькова Т.Н. *Аналитические свойства решений некоторых классов дифференциальных уравнений третьего и высших порядков.* Дис. … канд. физ.-мат. наук. Гродно, 2013.

6. Айнс Э.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ГНТИ, 1939.

7. Соболевский С.Л. *Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* Мн., БГУ, 2006.