О РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ЛИНИЕЙ

Б. Чжан, Я. Чэнь, И.П. Мартынов, В.А. Пронько

Рассмотрим два дифференциальных уравнения с подвижной особой линией из работ [1] и [2] соответственно:

$$x''' = \frac{(x'' - 2xx')^2}{x' - x^2} + 4xx'' - 2(x')^2, \tag{1}$$

$$y''' = 12yy'' - 18(y')^2. \tag{2}$$

В работе [3] приведены следующие преобразования Беклунда между уравнениями (1) и (2):

$$6y = \frac{x'' - 2x^3}{x' - x^2}, \quad x^3 - 3x^2y + 3xy' - \frac{1}{2}y'' = 0. \tag{3}$$

Запишем двухпараметрические рациональные решения уравнений (1) и (2)

$$x = -\frac{1}{z - z_1} - \frac{a}{(z - z_1)^2}, \quad y = -\frac{1}{z - z_1} - \frac{b}{(z - z_1)^2}, \quad \forall z_1, a, b, \tag{4}$$

и выясним, при каких условиях эти решения могут быть получены из общих решений уравнений (1) и (2).

Если общее решение уравнения (2) искать в виде

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < \rho, \tag{5}$$

то получим

$$b_{k+1} = \frac{6}{k(k^2 - 1)} \sum_{m=1}^{k} m(5m - 3k - 2) b_m b_{k-m}, \quad k = 2, 3, \ldots, \quad \forall b_0, b_1, b_2.$$

Имеют место следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $|b_k| \leqslant \delta^{k+1}/40$ *при* $k = 0, 1, 2$, *то* $|b_n| \leqslant \delta^{n+1}/40$, $\forall n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

Лемму 1 можно использовать при построении мажорантной функции для ряда (5) с целью оценки его радиуса сходимости.

Лемма 2. *Если* $b_k = (c - (k+1)b)/c^{k+2}$ *при* $k = 0, 1, 2$; $b, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, *то* $b_n = (c - (n+1)b)/c^{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

Справедлива

Теорема 1. *Если*

$$b_k = \frac{c - (k+1)b}{c^{k+2}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

то ряд (5) определяет рациональное решение y *из (4), причем* $z_1 = c + z_0$, $\rho = |c|$.

Следствие 1. *Чтобы рациональное решение уравнения (2) было задано рядом (5), необходимо и достаточно коэффициенты* b_0, b_1, b_2 *подчинить условию*

$$(b_2 - 3b_0b_1 + 2b_0^3)^2 = 4(b_0^2 - b_1)^3.$$

Положим

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < \rho_1. \tag{7}$$

Подставляя (5) и (7) в равенство $6y(x' - x^2) = x'' - 2x^3$, т.е. в первое соотношение из (4), получим

$$6\sum_{m=0}^{k}(m+1)a_{m+1}b_{k-m} = (k+1)(k+2)a_{k+2} +$$

$$+ 2\sum_{m=0}^{k}\sum_{l=0}^{m} a_l a_{m-l}(3b_{k-m} - a_{k-m}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{8}$$

При $k = 0$ получим

$$3(a_1 - a_0^2)b_0 = a_2 - a_0^3. \tag{9}$$

Полагая

$$a_k = \frac{c - (k+1)a}{c^{k+2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{10}$$

из (9) найдем

$$a = 3b. \tag{11}$$

Подставляя b_k и a_k из (6) и (10) с учетом (11) в равенство (8), получим тождество

$$6\sum_{m=0}^{k}(m+1)(c - bc(k + 2m + 7) + 3b^2(km - m^2 - m + 2k + 2)) =$$

$$= (k+1)(k+2)(c^2 - 3bc(k+3)) + 4\sum_{m=0}^{k}\sum_{l=0}^{m}(c^2 - 3bc(m+2) + 9b^2(ml - l^2 + m + 1)).$$

Теорема 2. *Функция (7) при условии (10) определяет рациональное решение x из (4), причем*

$$z_1 = c + z_0, \quad \rho_1 = |c|.$$

Следствие 2. *Чтобы рациональное решение уравнения (1) было задано рядом (7), необходимо и достаточно коэффициенты a_0, a_1, a_2 подчинить условию*

$$(a_2 - 3a_0a_1 + 2a_0^3)^2 = 4(a_0^2 - a_1)^3.$$

Литература

1. Мартынов И. П. *Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 764–771.

2. Chazy J. *Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d'ordre superieur dont l'integrale generale a ses points critiques fixes* // Acta Math. 1911. V. 34. P. 317–385.

3. Чэнь Ян. *Аналитические свойства решений системы Дарбу третьего порядка* // Весн. Гродзенскага дзярж. ўн-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2018. Т. 8. № 2. С. 26–31.