АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Алдибеков Т.М.

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x)y_k + g_i(x,\, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \quad x \in I \equiv [x_0, +\infty), \tag{1}$$

где функции $p_{ik}(x)$, $i, k = 1, \ldots, n$, непрерывны на промежутке I, функции $g_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны по $x \in I$ и имеют непрерывные частные производные по y_s, $s = 1, \ldots, n$, в области $\|y\| = (\sum_{s=1}^{n} y_s^2)^{1/2} < h$, $y = \operatorname{colon}[y_1, \ldots, y_n]$, $g_i(x, 0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема. *Если для некоторого числа $\alpha > 0$ и для некоторой положительной непрерывной функции $\varphi(x)$ такой, что $\int_{x_0}^{x} \varphi(s)\, ds \uparrow +\infty$, при $x \geqslant x_0$ выполняются условия:*

1) имеют место неравенства

$$p_{k,k}(x) - p_{k+1,k+1}(x) \geqslant \alpha\varphi(x), \quad k = 1, \ldots, n-1;$$

2) существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty} (|p_{ik}(x)|/\varphi(x)) = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n;$$

3) имеют место равенства

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\int_{x_0}^{x} \varphi(s)\, ds\right)^{-1} \int_{x_0}^{x} p_{kk}(s)\, ds = \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

причем постоянная β_1 отрицательна;

4) для чисел $\alpha \in (0, |\beta_1|)$, $m > 1$ и $\varepsilon \in (0, (m-1)\alpha)$ имеет место неравенство

$$\int_{x_0}^{x} e^{[\varepsilon+\alpha(1-m)][q(s)-q(x_0)]}\, ds < \infty;$$

5) векторная функция $g(x, y) = \operatorname{colon}[g_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, g_n(x, y_1, \ldots, y_n)]$ удовлетворяет неравенству

$$\|g(x, y)\| \leqslant K\|y\|^m, \quad K > 0, \quad m > 1,$$

где норма

$$\|g(x, y)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2(x, y_1, \ldots, y_n)\right)^{1/2},$$

то нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (1) экспоненциально устойчиво относительно $q(x)$ при $x \to +\infty$.

Литература

1. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006. С. 320.

2. Perron O. *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme* // Math. Z. 1930. Bd 31. S. 748–766.