ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА

И.В. Асташова

Рассматривается нелинейное уравнение типа Эмдена–Фаулера высокого порядка:

$$y^{(n)}=p(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})|y|^k\operatorname{sgn}y,\quad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant 2,\quad k\in\mathbb{R},\quad 0<k<1,\tag{1}$$

где функция $p(x,\xi_1,\dots,\xi_n)$ удовлетворяет условию $0<m\leqslant p(x,\xi_1,\dots,\xi_n)\leqslant M<$ $<+\infty$, непрерывна по всем переменным и удовлетворяет условию Липшица по переменным $\xi_1,\dots,\xi_n$. Рассмотрим также частный случай этого уравнения:

$$y^{(n)}=p_0\,|y|^k\operatorname{sgn}y,\quad n\geqslant 2,\quad k\in\mathbb{R},\quad 0<k<1,\quad p_0>0.\tag{2}$$

В работе [1, §11] дано определение сингулярных решений первого и второго рода. В соответствии с этой терминологией в случае сингулярной нелинейности $(0<k<1)$ под сингулярными решениями будем понимать решения, обращающиеся в нуль в некоторой точке вместе со всеми своими производными до порядка n, или знакопеременные решения, имеющие точку накопления нулей. Нас будет интересовать асимптотическое поведение таких решений вблизи границы области определения или вблизи точки нарушения единственности решения. Отметим, что в случаях, когда $n=3$ и $n=4$ (см. работы [5, 6] и приведенную в них библиографию) получена полная асимптотическая классификация решений уравнения (2) (а для случая $n=3$, $p=p(x)$ – и решений уравнения (1)), включающая описание сингулярных решений.

Приведем результат о типичности степенного поведения сингулярных решений на бесконечности для слабо нелинейных сингулярных уравнений. Аналогичный результат для регулярных $(k>1)$ слабо нелинейных уравнений вида (2) получен в [3], а таких уравнений вида (1) – в [4].

Теорема 1. *Пусть* $n\geqslant 2$, $p\in C(\mathbb{R}^{n+1})\bigcap\mathrm{Lip}_{y_0,\dots,y_{n-1}}(\mathbb{R}^n)$, $p\to p_0>0$ *при* $x\to$ $\to\infty$, $y_0\to\infty,\dots,y_{n-1}\to\infty$. *Тогда существует такое* $k_*\in(0;1)$, *что для любого действительного* $k\in(k_*;1)$ *любое максимально продолженное вправо решение уравнения (1), имеющее в некоторой точке положительный набор данных Коши, имеет степенное асимптотическое поведение:*

$$y(x)=\left(p_0\beta^n\prod_{l=1}^{m}(1-\beta l)^{-1}\right)^{1/(1-k)}x^{1/\beta}(1+o(1)),\quad x\to\infty,\quad m=n-1,\quad \beta=\frac{1-k}{n}.$$

Результаты о колеблющихся сингулярных решениях уравнений (1), (2) и их поведении содержатся в [1, §15, 7].

Литература

1. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А., *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1990.

2. Асташова И. В. *Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // В сб. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–290.

3. Astashova I. *On Kiguradze's problem on power-law asymptotic behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type differential equations* // Georgian Math. J. 2017. V. 24. № 2. P. 185–191.

4. Astashova I. *On asymptotic behavior of blow-up solutions to higher-order differential equations with general nonlinearity* // Differential and Difference Equations with Applications. Springer International Publishing AG, 2018. P. 1–13.

5. Асташова И. В. *Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 11. С. 847–848.

6. Astashova I. *On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity* // Differential and Difference Equations with Applications. New York: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2016. P. 191–204.

7. Astashova I. *On qualitative properties and asymptotic behavior of solutions to higher-order nonlinear differential equations* // WSEAS Trans. on Math. 2017. V. 16. № 5. P. 39—47.