О СТЕПЕННОМ И НЕСТЕПЕННОМ ПОВЕДЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА

И.В. Асташова

Для нелинейного уравнения типа Эмдена–Фаулера

$$y^{(n)} = p(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad n \geqslant 2, \quad k \in (1, \infty), \tag{1}$$

где функция $p(x, \xi_1, \dots, \xi_n)$ непрерывна по совокупности переменных, удовлетворяет условию Липшица по переменным $\xi_1, \dots, \xi_n$, а также неравенству $m \leqslant p(x, \xi_1, \dots$ $\dots, \xi_n) \leqslant M$ для некоторых положительных чисел m и M, изучается степенное и нестепенное поведение взрывных решений. Наряду с уравнением (1) будем рассматривать его частный случай – уравнение

$$y^{(n)} = p_0 |y|^k \operatorname{sgn} y, \quad n \geqslant 2, \quad k \in (1, \infty), \quad p_0 \in (0, +\infty). \tag{2}$$

Известно (см. [1, гл. V; 2, гл. 5.3]), что любое максимально продолженное вправо решение уравнения (1), положительное в некоторой точке вместе со всеми своими производными порядка, меньшего n, является взрывным, т.е. имеет вертикальную асимптоту в правой (конечной) границе x^* своей области определения. Ранее доказано, что для $n = 2$ (см. [1, гл. V]), для $n \in \{3, 4\}$ (см. работу [2, гл. 5.3] и ссылки в ней на более ранние работы), что любое взрывное решение уравнения (1) имеет степенное асимптотическое поведение

$$y(x) = \pm C(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad x \to x^* - 0, \tag{3}$$

где $C^{k-1} = p_0^{-1} \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha + j)$, $\alpha = n/(k-1)$. Здесь x^* – произвольная константа, а $p_0 > 0$ – предел функции p при $x \to x^*$, $y_0 \to +\infty$, $\dots$, $y_{n-1} \to +\infty$.

И.Т. Кигурадзе (см. [1, с. 324, задача 16.4]) поставил вопрос о справедливости этого утверждения для уравнения (1) более высокого порядка. Это предположение, базирующееся на доказанных в [3] оценках взрывных решений, оказалось верным для слабо нелинейного уравнения (1) (см. [4, 5]).

Теорема 1. *Пусть* $n > 4$ *и* $p \in C(\mathbb{R}^{n+1}) \bigcap \mathrm{Lip}_{y_0, \dots, y_{n-1}}(\mathbb{R}^n)$. *Если* $p \to p_0 > 0$ *при* $x \to x^*$, $y_0 \to +\infty$, $\dots$, $y_{n-1} \to +\infty$, *для некоторого* $x^* < \infty$, *то существует такое* $K > 1$, *что для каждого действительного* $k \in (1, K)$ *любое взрывное решение уравнения (1) с правой границей области определения* x^* *имеет степенное асимптотическое поведение (4).*

Однако для уравнения (2) (в [6] – для сколь угодно высокого порядка n, в [7] – для $n = 12, 13, 14$, в [8] – для произвольного $n \geqslant 12$) доказано, что при некотором $k > 1$ оно имеет нестепенное решение

$$y = (x^* - x)^{-\alpha} h(\log(x^* - x)), \tag{4}$$

где h – непостоянная непрерывная положительная периодическая функция на $\mathbb{R}$.

Оказалось, что асимптотически степенные решения уравнения (2) порядка $n \geqslant 12$ с достаточно сильной нелинейностью не только не исчерпывают множества всех взрывных решений, но и являются в некотором смысле нетипичными взрывными решениями этого уравнения.

При исследовании асимптотических свойств решений уравнений (1) и (2) (см. [2, гл. 5.3]) использовалось построение на $(n-1)$-мерной фазовой сфере динамической системы, исследование траекторий которой дало возможность получить полную асимптотическую классификацию решений в случаях $n = 3, 4$ (см. [9, 10]). Асимптотически степенным решениям уравнения (1) произвольного порядка $n \geqslant 2$ на этой сфере соответствуют траектории, стремящиеся к некоторой неподвижной точке системы. На координатной карте, покрывающей область сферы, соответствующую точкам с положительными значениями решения и его младших производных, эта система линеаризуется в окрестности особой точки, а собственные значения матрицы Якоби J удовлетворяют уравнению

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\lambda+\alpha+j)=\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha+j+1). \tag{5}$$

Характер спектра матрицы J определяет поведение взрывных решений уравнения (1). Доказано (см. [2, гл. 5.1]), что если у уравнения (5) существует m корней с отрицательной действительной частью, то уравнение (1) имеет m-параметрическое семейство взрывных решений со степенным асимптотическим поведением. Так, при $5 \leqslant n \leqslant 11$ доказано существование $(n-1)$-параметрического семейства взрывных решений со степенной асимптотикой у уравнения (1) при некоторых дополнительных предположениях относительно функции p (см. [2, гл. 5.1]). Существование решений вида (4) для уравнения (2) связано с появлением для любого $n \geqslant 12$ при некоторых $k > 1$ пары чисто мнимых корней и некоторыми дополнительными свойствами спектра матрицы J (см. [6–8]). Оказалось [11], что для доказательства нетипичности степенного поведения взрывных решений уравнения (2) также используются свойства корней уравнения (5).

Теорема 2. *Если среди корней уравнения (5) нет чисто мнимых, но существует по крайней мере один отличный от единицы корень с положительной действительной частью, то для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ множество данных Коши асимптотически степенных решений уравнения (2) имеет меру нуль.*

Теорема 3. *Если среди корней уравнения*

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\lambda+j)=\prod_{j=0}^{n-1}(j+1) \tag{6}$$

нет чисто мнимых, но существует по крайней мере один отличный от единицы корень с положительной действительной частью, то существует такое $k_n > 1$, что для любого $k > k_n$ и любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ множество данных Коши асимптотически степенных решений уравнения (2) имеет меру нуль.

Теорема 4. *Уравнение (6)*

для любого целого $n \geqslant 12$ имеет по крайней мере одну пару сопряженных корней с положительной действительной частью,

для любого натурального $n < 62$ имеет не больше одной пары сопряженных корней с неотрицательной действительной частью,

при $62 \leqslant n \leqslant 203$ имеет ровно две пары сопряженных корней с положительной действительной частью и не имеет чисто мнимых корней.

Теорема 5. *Для любого целого $n \in [12, 203]$ найдется такое $k_n > 1$, что для любого вещественного $k > k_n$ в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ множество данных Коши асимптотически степенных решений уравнения (2) имеет меру нуль.*

Отметим, что интересные результаты о взрывных решениях нелинейных уравнений содержатся в работе [12].

Нерешенные задачи.

1. Остается открытым вопрос о существовании решений вида (4) (как и других взрывных решений с нестепенным поведением) у уравнения (2) при $5 < n < 11$.

2. Не доказан факт отсутствия у уравнения (6) при $n > 203$ чисто мнимых корней, что означало бы нетипичность степенного поведения взрывных решений для уравнений таких порядков.

3. Для уравнения (2) при $n > 11$ отсутствует ответ на вопрос о существовании других его решений с нестепенным поведением, кроме решений вида (4).

Литература

1. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1990.

2. Асташова И. В. *Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012 P. 22–290.

3. Квиникадзе Г. Г., Кигурадзе И. Т. *О быстро растущих решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // Сообщ. АН ГССР 1982. V. 106. № 3. P. 465–468.

4. Astashova I. *On Kiguradze's problem on power-law asymptotic behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type differential equations* // Georgian Math. J. 2017. V. 24. № 2. P. 185–191.

5. Astashova I. V. *On asymptotic behavior of blow-up solutions to higher-order differential equations with general nonlinearity* // In: Pinelas S., Caraballo T., Kloeden P., Graef J. (eds) Differential and Difference Equat. with Appl. ICDDEA 2017. New York: Springer Proc. in Math. & Statistics, 2018. V. 230. P. 1–13.

6. Kozlov V. A. *On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations* // Ark. Mat. 1999. V. 37. № 2. P. 305–322.

7. Astashova I. V. *On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden–Fowler type higher-order equations* // Adv. in Difference Equat. SpringerOpen J. 2013. V. 2013:220. P. 1–15.

8. Astashova I., Vasilev V. *On nonpower-law behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type higher-order differential equations* // Inter. Workshop QUALITDE–2018, December 1–3, 2018. Tbilisi, 2018. P. 11–15.

9. Astashova I. *On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity* // Differential and Difference Equat. with Appl. New York: Springer Proc. in Math. & Statistics, 2016. P. 191–204.

10. Astashova I. *On qualitative properties and asymptotic behavior of solutions to higher-order nonlinear differential equations* // WSEAS Transact. on Math. 2017. V. 16. № 5. P. 39–47.

11. Асташова И. В. *О нетипичности асимптотически степенных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера высокого порядка* // Алгебра и анализ. 2019. Т. 31. № 2. С. 152–173.

12. Кигурадзе И. Т. *О взрывных кнезеровских решениях нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков* // Дифференц. уравнения. 2001. V. 37. № 6. P. 735–743.