ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА НЕПРАВИЛЬНОСТИ ЛЯПУНОВА СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Е.А. Барабанов, В.В. Быков

Пусть M – метрическое пространство. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим семейство

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \tag{1}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, такое, что при каждом фиксированном $\mu \in M$ определенная на временнóй полуоси $\mathbb{R}_+$ матричнозначная функция $A(\cdot,\mu)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и ограничена (при каждом μ, вообще говоря, своей постоянной). Поэтому при каждом фиксированном в семействе (1) значении $\mu \in M$ получаем линейную дифференциальную систему с непрерывными ограниченными на полуоси коэффициентами, показатели Ляпунова которой обозначим через $\lambda_1(\mu;A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu;A)$.

Определение 1. Коэффициентом неправильности Ляпунова [1, с. 73] семейства (1) называется функция $\sigma_{\text{Л}}(\cdot;A)\colon M \to \mathbb{R}_+$, задаваемая равенством

$$\sigma_{\text{Л}}(\mu;A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mu;A) - \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau,\mu)\,d\tau, \quad \mu \in M.$$

Очевидно, что если не потребовать выполнения каких-то дополнительных свойств отображения $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, то для произвольной функции $M \to \mathbb{R}_+$ найдется семейство (1), коэффициент неправильности Ляпунова $\sigma_{\text{Л}}(\cdot;A)$ которого с ней совпадает, и поэтому рассмотрение таких, без дополнительных предположений, семейств (1) бессодержательно как с математической точки зрения, так и с точки зрения практических приложений, в которых эти семейства возникают, в частности, как системы в вариациях нелинейных семейств, в том или ином смысле непрерывно зависящих от параметра.

Обычно семейство матричнозначных отображений $A(\cdot,\mu)$, $\mu \in M$, рассматривают при одном из следующих двух естественных предположений: это семейство непрерывно либо а) в компактно-открытой топологии, либо б) в равномерной топологии. Условие а) равносильно тому, что если последовательность $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ точек из M сходится к точке μ_0, то последовательность функций $A(\cdot,\mu_k)$ переменной $t \geqslant 0$ сходится к функции $A(\cdot,\mu_0)$ при $k \to +\infty$ равномерно на каждом отрезке $[0,T] \subset \mathbb{R}_+$, а условие б) – что эта сходимость равномерна на всей временнóй полуоси $\mathbb{R}_+$. Класс семейств (1), непрерывных в указанном выше смысле в компактно-открытой топологии, обозначим через $\mathcal{C}^n(M)$, а непрерывных в равномерной топологии – через $\mathcal{U}^n(M)$. Очевидно включение $\mathcal{U}^n(M) \subset \mathcal{C}^n(M)$. Далее мы отождествляем семейство (1) и задающую его матричнозначную функцию $A(\cdot,\cdot)$ и поэтому пишем $A \in \mathcal{C}^n(M)$ или $A \in \mathcal{U}^n(M)$.

Класс вектор-функций $\{(\lambda_1(\cdot;A),\ldots,\lambda_n(\cdot;A))^{\mathrm{т}} : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и M описан в работе [2], а описание класса $\{(\lambda_1(\cdot;A),\ldots,\lambda_n(\cdot;A))^{\mathrm{т}} : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$ получено в работе [3]. Ниже приведено полное дескриптивно-множественное описание класса $\{\sigma_{\text{Л}}(\cdot; A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M. Прежде чем его привести, напомним следующее

Определение 2. Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется [4, с. 224] функцией класса $({}^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([r, +\infty))$ полуинтервала $[r, +\infty)$ является G_δ-множеством метрического пространства M.

Теорема. *Пусть заданы произвольные число $n \geqslant 2$ и метрическое пространство M. Тогда функция $f : M \to \mathbb{R}_+$ является коэффициентом неправильности Ляпунова некоторого семейства $A \in \mathcal{U}^n(M)$ тогда и только тогда, когда она принадлежит классу $({}^*, G_\delta)$ и имеет непрерывную мажоранту.*

Замечание 1. При $n = 1$ описание класса $\{\sigma_{\text{Л}}(\cdot; A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$ тривиально: он состоит из всех непрерывных функций $M \to \mathbb{R}_+$.

Замечание 2. Аналогичное описание класса $\{\sigma_{\text{Л}}(\cdot; A) : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$ легко извлекается из результата работы [2] и заключается в следующем: для всяких $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M функция $f : M \to \mathbb{R}_+$ является коэффициентом неправильности Ляпунова некоторого семейства $A \in \mathcal{C}^n(M)$ тогда и только тогда, когда она принадлежит классу $({}^*, G_\delta)$.

Приведенная выше теорема позволяет описать строение лебеговских множеств [4, с. 221] коэффициента неправильности Ляпунова семейств из $\mathcal{U}^n(M)$.

Следствие. *Пусть заданы метрическое пространство M и числа $n \geqslant 2$ и $r \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) совокупность множеств $\{\mu \in M : \sigma_{\text{Л}}(\mu; A) \geqslant r\}$, $A \in \mathcal{U}^n(M)$, состоит из всех подмножеств M типа G_δ, если $r > 0$ и содержит единственный элемент M, если $r \leqslant 0$;

2) совокупность множеств $\{\mu \in M : \sigma_{\text{Л}}(\mu; A) > r\}$, $A \in \mathcal{U}^n(M)$, состоит из всех подмножеств M типа $G_{\delta\sigma}$, если $r \geqslant 0$ и содержит единственный элемент M, если $r < 0$;

3) совокупность множеств $\{\mu \in M : \sigma_{\text{Л}}(\mu; A) = r\}$, $A \in \mathcal{U}^n(M)$, состоит из всех подмножеств M типа $F_{\sigma\delta}$, если $r \geqslant 0$ и содержит единственный элемент M, если $r < 0$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского Фонда фундаментальных исследований (проект Ф17-102).

Литература

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.

2. Карпук М. В. *Показатели Ляпунова обобщенных расслоений Миллионщикова как функции на базе расслоения* // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1140–1141.

3. Барабанов Е. А., Быков В. В., Карпук М. В. *Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временной полуоси* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1579–1588.

4. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.; Л.: ОНТИ, 1937.