УСЛОВИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВОЗМУЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.А. Бондарь

Рассматривается система линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами

$$y_{n+1} = (A(n) + B(n))y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $A(n)$ – невырожденные матрицы размера $m \times m$, а матричная последовательность $\{A(n)\}$ – N-периодическая, т.е. $A(n+N) = A(n)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\{B(n)\}$ – N-периодическая последовательность возмущений. Предполагается, что система

$$x_{n+1} = A(n)x_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

экспоненциально дихотомична. Как показано в работе [1], это эквивалентно тому, что существуют эрмитовы матрицы $H(0)$, $H(1)$, $\ldots, H(N-1)$ и матрица P, удовлетворяющие следующей краевой задаче:

$$H(l) - A^*(l)H(l+1)A(l) = (U_l^*)^{-1}P^*U_l^*U_lPU_l^{-1} - (U_l^*)^{-1}(I-P)^*U_l^*U_l(I-P)U_l^{-1}, \ l = \overline{0, N-1},$$
$$H(0) = H(N) > 0, \quad H(0) = P^*H(0)P + (I-P)^*H(0)(I-P),$$
$$P^2 = P, \quad PU_N = U_NP, \tag{2}$$

где U_l – матрица Коши. Этот критерий является аналогом критерия Крейна для экспоненциальной дихотомии разностных уравнений с постоянными коэффициентами [2].

Используя тот факт, что решение краевой задачи (2) представимо в виде

$$H(l) = (U_l^*)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(U_N^*)^kP^*\left(\sum_{i=l}^{N+l-1}U_i^*U_i\right)PU_N^k\right)U_l^{-1} +$$

$$+ (U_l^*)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(U_N^*)^k(I-P)^*\left(\sum_{i=l}^{N+l-1}U_i^*U_i\right)(I-P)U_N^k\right)U_l^{-1} = H^-(l) + H^+(l),$$

можно получить условия на возмущения $\{B(n)\}$, при которых система (1) также экспоненциально дихотомична.

Теорема. *Пусть* $\det(A(n)) \neq 0$ *и матричная последовательность возмущений* $\{B(n)\}$ *удовлетворяет условию*

$$\max\{\|B(0)\|, \ldots, \|B(N-1)\|\} < \left(\left(1 - \frac{1}{h^-}\right)\sqrt{h^-\|H(0)\|} + \left(1 + \frac{1}{h^+}\right)\sqrt{h^+\|H(0)\|}\right)^{-1},$$

где

$$h^- = \max\{\|H^-(0)\|, \|H^-(1)\|, \ldots, \|H^-(N-1)\|\},$$

$$h^+ = \max\{\|H^+(0)\|, \|H^+(1)\|, \ldots, \|H^+(N-1)\|\}.$$

Тогда для возмущенной системы (1) имеет место экспоненциальная дихотомия.

Данные исследования являются продолжением [1, 3–5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-31-00408).

Литература

1. Демиденко Г. В., Бондарь А. А. *Экспоненциальная дихотомия систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами* // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 6. С. 1240–1254.

2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970.

3. Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В. *Числовые характеристики асимптотической устойчивости решений линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами* // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41. № 6. С. 1227–1237.

4. Demidenko G. V. *Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms* // J. Comp. Math. Optim. 2010. V. 6. № 1. P. 1–12.

5. Demidenko G. V. *On conditions for exponential dichotomy of systems of linear differential equations with periodic coefficients* // Inter. J. Dyn. Syst. Differ. Equat. 2016. V. 6. № 1. P. 63–74.