ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА РАВНОМЕРНО НА ВРЕМЕННО́Й ПОЛУОСИ

В.В. Быков

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Пусть M – метрическое пространство. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим семейство

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \tag{1}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, такое, что при каждом фиксированном $\mu \in M$ определенная на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ матричнозначная функция $A(\cdot,\mu)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и ограничена (при каждом μ, вообще говоря, своей постоянной). Таким образом, при каждом фиксированном в семействе (1) значении $\mu \in M$ получаем линейную дифференциальную систему с непрерывными ограниченными на полуоси коэффициентами, показатели Ляпунова которой обозначим через $\lambda_1(\mu;A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu;A)$. Потребуем, чтобы семейство (1) было непрерывно в топологии равномерной сходимости коэффициентов на полуоси, т.е. чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\nu\to\mu} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |A(t,\nu) - A(t,\mu)| = 0, \quad \mu \in M. \tag{2}$$

Класс таких семейств (1) обозначим через $\mathcal{U}^n(M)$. Далее мы отождествляем семейство (1) и задающую его матричнозначную функцию $A(\cdot,\cdot)$ и поэтому пишем $A \in \mathcal{U}^n(M)$.

Еще О. Перрон [1] (см. также [2, с. 23–24]) указал пример аналитического отображения $A \in \mathcal{U}^2([0,1])$, для которого функция $\lambda_2(\cdot\,;A)$ не только не является непрерывной, но даже не является полунепрерывной сверху. Возникает естественный вопрос: что́ представляет собой класс функций

$$\Lambda_k(M;n) = \{\lambda_k(\cdot\,;A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\} \tag{3}$$

для заданных $n \geqslant 2$, $k = \overline{1,n}$ и метрического пространства M? В случае $n = 1$ описание класса (4) очевидно: он состоит из всех непрерывных функций $M \to \mathbb{R}$.

В.М. Миллионщиков в работе [3] установил, что для каждого $k = \overline{1,n}$ и всякого непрерывного отображения $A(\cdot,\cdot)$ (даже не обязательно ограниченного по t при фиксированном значении μ) функция $\lambda_k(\cdot\,;A)$ представляется как предел убывающей последовательности функций первого бэровского класса, и, в частности, принадлежит второму бэровскому классу. То, что в этом утверждении номер бэровского класса понизить нельзя, доказано М.И. Рахимбердиевым [4].

Прежде чем сформулировать основной результат, напомним следующее определение [5, с. 223–224]. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – совокупности подмножеств пространства M. Тогда функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется функцией класса $(\mathfrak{M},^*)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}((r,+\infty))$ интервала $(r,+\infty)$ принадлежит $\mathfrak{M}$ и функцией класса $(^*,\mathfrak{N})$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([r,+\infty))$ полуинтервала $[r,+\infty)$ принадлежит $\mathfrak{N}$. Наконец, функция f называется функцией класса $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$, если она одновременно является функцией класса $(\mathfrak{M},^*)$ и функцией класса $(^*,\mathfrak{N})$. Напомним также, что G_δ-множеством называется счетное пересечение открытых множеств, а F_σ-множеством – счетное объединение замкнутых множеств.

Следующая теорема [6] содержит полное описание класса (3).

Теорема 1. *Пусть заданы метрическое пространство M, функция $f : M \to \mathbb{R}$ и числа $n \geqslant 2$ и $k \in \{1,\dots,n\}$. Тогда семейство $A \in \mathfrak{U}^n(M)$, удовлетворяющее условию $\lambda_k(\cdot\,;A) = f$, существует тогда и только тогда, когда f принадлежит классу $(^*,G_\delta)$ и имеет непрерывные миноранту и мажоранту.*

Основной в приведенной выше теореме является ее достаточная, конструктивная, часть, которая допускает следующие уточнения.

Обозначим через $\mathfrak{Q}^n(M)$ класс семейств (1) вида $A(t,\mu) = B(t) + Q(t,\mu)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in M$, где $B(t)$ – ограниченная $n \times n$-матрица, а $Q(t,\mu)$ – ограниченная $n \times n$-матрица, убывающая при $t \to +\infty$ к нулю равномерно относительно $\mu \in M$. Из доказательства приведенной теоремы вытекает следующее

Следствие 1. *Для каждых натурального $n \geqslant 2$, $k = \overline{1,n}$, метрического пространства M и ограниченной функции $f : M \to \mathbb{R}$, принадлежащей классу $(^*,G_\delta)$, существует такое семейство $A \in \mathfrak{Q}^n(M)$, что $\Lambda_k(\cdot\,;A) = f$.*

В случае, когда M – отрезок вещественной оси, можно выбрать нужное семейство аналитическим по параметру.

Следствие 2. *Для каждых натурального $n \geqslant 2$, $k = \overline{1,n}$ и ограниченной функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, принадлежащей классу $(^*,G_\delta)$, существует такое аналитическое по второму аргументу семейство $A \in \mathfrak{Q}^n(M)$, что $\Lambda_k(\cdot\,;A) = f$.*

Приведенная выше теорема позволяет описать строение лебеговских множеств [5, с. 221] показателей Ляпунова семейств из $\mathfrak{U}^n(M)$.

Следствие 3. *Пусть заданы метрическое пространство M и числа $n \geqslant 2$, $k = \overline{1,n}$ и $r \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) совокупность множеств $\{\mu \in M : \lambda_k(\mu;A) \geqslant r\}$, $A \in \mathfrak{U}^n(M)$, состоит из всех подмножеств M типа G_δ;

2) совокупность множеств $\{\mu \in M : \lambda_k(\mu;A) > r\}$, $A \in \mathfrak{U}^n(M)$, состоит из всех подмножеств M типа $G_{\delta\sigma}$ (т.е. счетных объединений подмножеств типа G_δ);

3) совокупность множеств $\{\mu \in M : \lambda_k(\mu;A) = r\}$, $A \in \mathfrak{U}^n(M)$, состоит из всех подмножеств M типа $F_{\sigma\delta}$ (т.е. счетных пересечений подмножеств типа F_σ).

Приведенная теорема также позволяет в случае полного сепарабельного пространства M для всяких $n \geqslant 2$ и $k = \overline{1,n}$ описать совокупность множеств значений k-го показателя Ляпунова семейств из $\mathfrak{U}^n(M)$, т.е. множество $\mathfrak{R}^n_k(M) \equiv \{\lambda_k(M;A) : A \in \mathfrak{U}^n(M)\}$. Через $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ условимся обозначать совокупности соответственно непустых суслинских [5, с. 192], ограниченных и не более чем счетных подмножеств вещественной прямой, а через $\mathfrak{P}(M)$ – совокупность подмножеств вещественной прямой, имеющих мощность, не превосходящую мощности множества M.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Следствие 4. *Пусть заданы метрическое пространство M и числа $n \geqslant 2$ и $k = \overline{1,n}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если M компактно, то $\mathfrak{R}_k^n(M) = \mathfrak{S} \bigcap \mathfrak{B} \bigcap \mathfrak{P}(M)$;

2) если M является объединением компактного и счетного подмножеств и некомпактно, то $\mathfrak{R}_k^n(M)$ состоит из всех множеств вида $S \bigcup C$, где $S \in \mathfrak{S} \bigcap \mathfrak{B} \bigcap \mathfrak{P}(M)$, а $C \in \mathfrak{C}$;

3) если M полно, сепарабельно и не является объединением компактного и не более чем счетного подмножеств, то $\mathfrak{R}_k^n(M) = \mathfrak{S}$.

Как показывает пример М.И. Рахимбердиева [4], множество точек непрерывности функции $\lambda_k(\cdot\,; A)$, $k = \overline{1,n}$, может оказаться пустым, даже если M – отрезок. В работе [3] В.М. Миллионщиков доказал, что если M – полное метрическое пространство, то для всякой непрерывной функции $A : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ при каждом $k = \overline{1,n}$ множество $US_k(A)$ точек полунепрерывности сверху функции $\lambda_k(\cdot\,; A)$ содержит плотное G_δ-множество. Другими словами, полунепрерывность сверху этих функций типична по Бэру в пространстве M. Для полунепрерывности снизу это уже не так: в работе [7] для любых $n \geqslant 2$ и $k = \overline{1,n}$ построено семейство $A \in \mathcal{U}^n([0,1])$, для которого множество точек полунепрерывности снизу $LS_k(A)$ пусто.

Используя полученную теорему, мы можем для каждого метрического пространства M полностью описать каждое из множеств $LS_k(A)$, $k = \overline{1,n}$, а в случае полного пространства M – также и каждое из множеств $US_k(A)$ для семейств $A \in \mathcal{U}^n(M)$.

Следствие 5. *Для каждых натурального $n \geqslant 2$, $k = \overline{1,n}$ и метрического пространства M подмножество S пространства M тогда и только тогда является множеством полунепрерывности снизу k-го показателя Ляпунова некоторого семейства $A \in \mathcal{U}^n(M)$, т.е. $S = LS_k(A)$, когда S представляет собой множество типа $F_{\sigma\delta}$, содержащее все изолированные точки пространства M. Более того, в тех случаях, когда указанное семейство существует, оно может быть выбрано из класса $\mathcal{Q}^n(M)$.*

Следствие 6. *Для каждых натурального $n \geqslant 2$, $k = \overline{1,n}$ и полного метрического пространства M подмножество S пространства M тогда и только тогда является множеством полунепрерывности сверху k-го показателя Ляпунова некоторого семейства $A \in \mathcal{U}^n(M)$, т.е. $S = US_k(A)$, когда множество S представляет собой плотное в пространстве M множество типа G_δ. Более того, в тех случаях, когда указанное семейство существует, оно может быть выбрано из класса $\mathcal{Q}^n(M)$.*

Семейство (1) можно рассматривать и при менее жестком ограничении, чем условие (2), а именно, требовать лишь непрерывности матричнозначной функции $A(\cdot,\cdot)$. Последнее равносильно требованию непрерывности семейства в смысле топологии равномерной сходимости коэффициентов на компактах временной полуоси. Обозначим класс таких семейств через $\mathcal{C}^n(M)$. Полное описание класса функций $\{\lambda_k(\cdot\,; A) : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$, $k = \overline{1,n}$, и даже класса вектор-функций $\{(\lambda_1(\cdot\,; A), \ldots, \lambda_n(\cdot\,; A))^{\mathrm{T}} : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$, для всяких метрического пространства M и числа $n \in \mathbb{N}$ получено в работе [8]. Описание множеств точек полунепрерывности $LS_k(A)$ и $US_k(A)$, $k = \overline{1,n}$, для семейств из класса $\mathcal{C}^n(M)$, а также n-наборов множеств каждого из этих типов, получено в работе [9].

Полное описание класса вектор-функций $\{(\lambda_1(\cdot\,; A), \ldots, \lambda_n(\cdot\,; A))^{\mathrm{T}} : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$ представляет собой существенно более трудную задачу, которая была решена в работе [10]. В ней получены аналоги основной теоремы настоящего доклада, а также следствия 1 и следствий 5 и 6. Сформулируем основной результат этой работы.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Теорема 2. *Для каждых* $n \geqslant 2$, *метрического пространства* M *и вектор-функции* $(f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}} : M \to \mathbb{R}^n$, *компоненты которой принадлежат классу* $(^*, G_\delta)$, *имеют непрерывные миноранту и мажоранту и для любого* $\mu \in M$ *удовлетворяют неравенствам* $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$, *существует такое семейство* $A \in \mathfrak{U}^n(M)$, *что для его показателей Ляпунова* $\lambda_k(\cdot\,; A)$ *при всех* $k = \overline{1, n}$ *и* $\mu \in M$ *справедливы равенства* $\lambda_k(\mu; A) = f_k(\mu)$.

В качестве приложения приведенной теоремы рассмотрим следующую задачу. Для каждого $\mu \in M$ обозначим через $S(\mu; A)$ пространство решений системы (1). Зафиксируем произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$. Как известно, множества $L_\alpha(\mu; A) \equiv \{x \in S(\mu; A) : \lambda[x] < \alpha\}$ и $N_\alpha(\mu; A) \equiv \{x \in S(\mu; A) : \lambda[x] \leqslant \alpha\}$ являются векторными подпространствами пространства $S(\mu; A)$. Обозначим их размерности через $d_\alpha(\mu; A)$ и $D_\alpha(\mu; A)$ соответственно. Возникает естественный вопрос, что́ представляют собой функции $\mu \mapsto d_\alpha(\mu; A)$ и $\mu \mapsto D_\alpha(\mu; A)$? А.Н. Ветохин установил [11], что если M – пространство всех линейных n-мерных систем, наделенное одной из двух топологий – компактно-открытой или равномерной, а семейство (1) задается равенством $A(t, \mu) = \mu(t)$, $\mu \in M$, $t \in \mathbb{R}_+$, то первая функция при всех $n \geqslant 2$ принадлежит в точности второму бэровскому классу, а вторая – в точности третьему. Следующие утверждения [12] содержат полное описание классов $\{d_\alpha(\cdot\,; A) : A \in \mathfrak{U}^n(M)\}$ и $\{D_\alpha(\cdot\,; A) : A \in \mathfrak{U}^n(M)\}$ для каждых метрического пространства M и чисел $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Следствие 7. *Пусть заданы метрическое пространство* M, *числа* $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$ *и функция* $f : M \to \{0, \ldots, n\}$. *Тогда* $f = d_\alpha(\cdot\,; A)$ $(f = D_\alpha(\cdot\,; A))$ *для некоторого семейства* $A \in \mathfrak{U}^n(M)$ *тогда и только тогда, когда 1) для* $n \geqslant 2$ *функция* f *принадлежит классу* (F_σ, F_σ) *(соответственно, классу* $(F_{\sigma\delta}, F_{\sigma\delta})$*); 2) для* $n = 1$ *функция* f *полунепрерывна снизу (соответственно, сверху). Более того, для* $n \geqslant 2$ *в тех случаях, когда указанное семейство существует, оно может быть выбрано из класса* $\mathfrak{Q}^n(M)$.

Следствие 7 позволяет полностью описать множества точек полунепрерывности функций $d_\alpha(\cdot\,; A)$ и $D_\alpha(\cdot\,; A)$ для семейств $A \in \mathfrak{U}^n(M)$.

Следствие 8. *Пусть заданы метрическое пространство* M, *числа* $\alpha \in \mathbb{R}$ *и* $n \geqslant 2$. *Тогда множество* $S \subset M$ *является множеством точек полунепрерывности снизу функции* $d_\alpha(\cdot\,; A)$ *для некоторого семейства* $A \in \mathfrak{U}^n(M)$ *тогда и только тогда, когда* S *– плотное* G_δ*-множество, и множеством точек полунепрерывности сверху, когда* S *– плотное* F_σ*-множество. Более того, в тех случаях, когда указанное семейство существует, оно может быть выбрано из класса* $\mathfrak{Q}^n(M)$.

Следствие 9. *Пусть заданы метрическое пространство* M, *числа* $\alpha \in \mathbb{R}$ *и* $n \geqslant 2$. *Тогда множество* $S \subset M$ *является множеством точек полунепрерывности снизу функции* $D_\alpha(\cdot\,; A)$ *для некоторого семейства* $A \in \mathfrak{U}^n(M)$ *тогда и только тогда, когда* S *– плотное* $F_{\sigma\delta}$*-множество, и множеством точек полунепрерывности сверху, когда* S *– плотное* $G_{\delta\sigma}$*-множество. Более того, в тех случаях, когда указанное семейство существует, оно может быть выбрано из класса* $\mathfrak{Q}^n(M)$.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Литература

1. Perron O. *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen* // Math. Zeitschr. 1930. Bd 32. H. 1. S. 703–728.

2. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн., 2006.

3. Миллионщиков В. М. *Показатели Ляпунова как функции параметра* // Мат. сб. 1988. Т. 137. № 3. С. 364–380.

4. Рахимбердиев М. И. *О бэровском классе показателей Ляпунова* // Мат. заметки. 1982. Т. 31. Вып. 6. С. 925–931.

5. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.; Л.: ОНТИ, 1937.

6. Быков В. В. *Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси* // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 12. С. 1579–1592.

7. Ветохин А. Н. *Пустота множества точек полунепрерывности снизу показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 282–291.

8. Карпук М. В. *Показатели Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1332–1138.

9. Карпук М. В. *Строение множеств точек полунепрерывности показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1404–1408.

10. Барабанов Е. А., Быков В. В., Карпук М. В. *Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временной полуоси* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1579–1588.

11. Ветохин А. Н. *Точный бэровский класс некоторых ляпуновских показателей на пространстве линейных систем с компактно-открытой и равномерной топологиями* // Современные проблемы математики и механики. М., 2015. Т. 9. Вып. 3. С. 54–71.

12. Barabanov E. A., Bykov V. V., Karpuk M. V. *On dimensions of subspaces defined by Lyapunov exponents of families of linear differential systems* // Inter. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq. (December, 1–3, 2018). Tbilisi, Georgia, 2018. P. 16–20.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/