ПРИЗНАК НЕРАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЕМ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.К. Деменчук

Условия протекания процесса, когда колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями, в приложениях называют асинхронным режимом [1]. Автоколебательные системы, функционирующие в асинхронном режиме, обладают рядом ценных качеств: стабильность частоты и ее независимость от частоты источника, возможность плавной регулировки частоты. Это подчеркивает актуальность синтеза таких систем и их использование в технических целях.

В работе [2] задача конструирования периодических систем, обладающих асинхронным режимом, поставлена в виде задачи управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром). В этом направлении в некоторых случаях получено решение такой задачи для систем с конечным распределенным спектром.

В связи с этим представляется актуальным исследование подобных вопросов в гораздо более сложном случае почти периодических (по Бору [3]) систем, поскольку их спектр может быть самым разнообразным, имеющим, например, точки сгущения.

Определение 1. Вещественное число λ, называется показателем Фурье (частотой) почти периодической функции $f(t)$, если выполняется условие

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\exp(\lambda t)dt \not\equiv 0.$$

Определение 2. Модулем (частотным модулем) $\mathrm{Mod}\,(f)$ почти периодической функции $f(t)$) называется наименьшая аддитивная группа вещественных чисел, содержащая все показатели Фурье этой функции.

Определение 3. Почти периодическое решение некоторой разрешенной относительно производной почти периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется сильно нерегулярным, если пересечение частотных модулей решения и ее правой части тривиально.

Отметим, что в периодическом случае условие сильной нерегулярности означает несоизмеримость периодов решения и самой системы [4].

Будем говорить, что некоторые столбцы матрицы $P(t)$ линейно независимы над $\mathbb{R}$, если их линейные комбинации с вещественными коэффициентами тождественно равны нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты нулевые. Через $\mathrm{rank_{col}}\,P$ обозначим столбцовый ранг матрицы $P(t)$, т.е. наибольшее число ее линейно независимых над $\mathbb{R}$ столбцов. Отметим, что вообще говоря, столбцовый ранг матрицы не совпадает с наибольшим числом ее линейно независимых строк.

Пусть задана линейная система управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad n\geqslant 2, \tag{1}$$

где $A(t)$ – непрерывная почти периодическая $n\times n$-матрица с модулем частот $\mathrm{Mod}\,(A)$, B – постоянная $n\times n$-матрица. Предположим, что управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным

$$u = U(t)x$$

с непрерывной почти периодической $n\times n$-матрицей $U(t)$, $\mathrm{Mod}\,(U)\subseteq\mathrm{Mod}\,(A)$.

Задача управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) с целевым множеством частот L состоит в следующем: требуется выбрать такую матрицу $U(t)$ (коэффициент обратной связи), чтобы замкнутая этим управлением система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x$$

имела сильно нерегулярное почти периодическое решение $x(t)$, спектр частот которого содержит заданное подмножеством L.

Предварительно заметим, что даже если свободная система $\dot{x} = A(t)x$ имеет сильно нерегулярные периодические решения, то задача управления спектром сильно нерегулярных колебаний остается содержательной, поскольку вопрос о мощности асинхронного спектра является открытым. Укажем условие на мощность целевого множества, при котором поставленная задача не имеет решений.

Пусть ранг матрица B равен r, $1 \leqslant r \leqslant n$. Без ограничения общности будем считать, что первые $n-r$ строк матрицы B нулевые, т.к. в противном случае этого можно добиться линейным невырожденным стационарным преобразованием переменных. Обозначим через A_{12} – правый верхний блок размерности $(n-r)\times r$ матрицы коэффициентов $A(t)$.

Справедлива

Теорема. *Пусть матрица коэффициентов системы (1) имеет нулевое среднее значение, т.е.*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T A(t)dt = 0.$$

Если выполняется неравенство

$$|L| > [(n - \operatorname{rank}_{\mathrm{col}}(A_{12}))/2],$$

то задача управления спектром нерегулярных колебаний с целевым множеством частот L для системы (1) не разрешима.

Исследования выполнены в Институте математики НАН Беларуси при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф18Р-014 «Робастность и потеря устойчивости динамических систем»).

Литература

1. Вермель А. С., Дубошинский Д. Б., Пеннер Д. И. и др. *Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний* // Успехи физич. наук. 1973. Т. 109. Вып. 1. С. 402–406.

2. Деменчук А. К. *Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний* // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 4. С. 37–42.

3. Левитан Б. М. *Почти периодические функции.* М.: Гостехиздат, 1953.

4. Курцвейль Я., Вейвода О. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. мат. журн. 1955. Т. 5. № 3. С. 362–370.