УДК 531.8

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИЗМОВ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

О. В. ПУЗАНОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь.

Уравнение Лагранжа второго рода для механизма с w степенями подвижности с жесткими звеньями и голономными стационарными связями имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+Q_{cs} \quad (s=1,\dots,w),$$

где $T(q_1, \dots, q_w, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_w)$ – кинетическая энергия механизма, представленная как функция обобщённых координат и их производных; Q_s, Q_{cs} – обобщенные движущие силы и силы сопротивления.

Для механизма с одной степенью подвижности уравнение Лагранжа второго рода имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q+Q_c.$$

Координаты всех точек такой механической системы могут быть представлены как функции обобщённой координаты q:

$$x_k = x_k(q); \quad y_k = y_k(q); \quad z_k = z_k(q).$$

Кинетическую энергию T механизма можно представить как энергию системы n материальных точек с голономными стационарными связями:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\dot{x}_k^2+\dot{y}_k^2+\dot{z}_k^2\right)=\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2,$$

где $a(q)$ – инерционный коэффициент.

Тогда уравнение Лагранжа второго рода для механизма с одной степенью подвижности имеет вид:

$$a(q)\ddot{q}+\frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2=Q+Q_c.$$

Уравнение Лагранжа второго рода для механизма с несколькими степенями подвижности аналогично предыдущему и имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{w} a_{sk}\ddot{q}_s+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{w}[i,k,s]\dot{q}_i\,\dot{q}_k=Q+Q_c \quad (s=1,\dots,w),$$

где $[i,k,s]$ – символ Кристоффеля первого рода,

$$[i,k,s] = \sum_{i,k=1}^{w} \left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_s} \right).$$

Решались задачи построения математических моделей механизмов с одной и несколькими подвижностями (рис. 1) на основе уравнения Лагранжа второго рода.

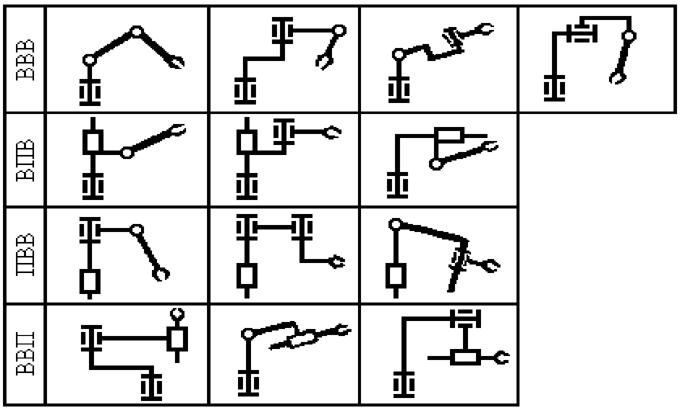

Рис. 1. Схемы пространственных трехподвижных механизмов

Кинетическую энергию звеньев механизма представляли в виде суммы кинетических энергий отдельных звеньев

$$T = \sum_{i}^{N} T_i \,.$$

Кинетическая энергия каждого звена, совершающего пространственное движение, определялась по теореме Кенига

$$T_i = \frac{1}{2}\left(m_i v_{C_i}^2 + \Omega_i \cdot J_i^C \cdot \Omega_i \right),$$

где i – номер звена; m_i – его масса; J_i^C – тензор инерции i-го звена в его центре масс C_i; Ω_i – абсолютная угловая скорость i-го звена.

При анализе одноподвижных плоских рычажных механизмов получены графики изменения обобщённой координаты q и ее производных от времени при заданной постоянной рабочей нагрузке и постоянном движущем моменте. Установлено, что характер движения зависит от уровня нагрузки. При переменной нагрузке эквивалентные гармонические колебания передаются ведущему звену.

При анализе пространственных трехподвижных механизмов установлено, что законы движения по одной из обобщённых координат влияют на моменты двигателей, изменяющих другие координаты, т. е. появляется динамическая связанность степеней подвижности пространственных трехподвижных механизмов.