# ЭФФЕКТ ПЕРРОНА СМЕНЫ ЗНАЧЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СУСЛИНСКИМ МНОЖЕСТВОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

**Н.А. Изобов, А.В. Ильин**

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

В качестве линейного приближения рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на полуоси $[t_0, +\infty)$ коэффициентами и отрицательными характеристическими показателями $\lambda_1(A) = \lambda_1 \leqslant \lambda_2 = \lambda_2(A) < 0$. В возмущенной системе

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

вектор-функция $f : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (так называемое $m$-возмущение) также бесконечно дифференцируема по своим аргументам $t \geqslant t_0$ и $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ и имеет порядок $m > 1$ малости в окрестности начала координат и допустимого роста вне ее:

$$\|f(t, y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad C_f = \text{const}, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Далее через $y(t, c)$ обозначается решение системы (2) с начальным вектором $y(t_0, c) = c = (c_1, c_2)$.

Эффект Перрона [1; 2, с. 50–51] смены значений характеристических показателей устанавливает существование линейной системы (1) с отрицательными показателями $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0$ и нелинейной системы (2) с 2-возмущением (4) и всеми бесконечно продолжимыми вправо решениями, таких, что все нетривиальные решения $y(t, c)$, для которых $c_1 = 0$, имеют показатели, равные старшему характеристическому показателю $\lambda_2 < 0$ системы линейного приближения (1) (это позволяет считать эффект неполным), а показатели всех остальных нетривиальных решений системы (2) равны некоторому числу $\lambda_0 > 0$ (вычисленному в [3, с. 13–15]).

В работах [4–6] и приведенном в них цикле предшествующих работ авторов рассматривается полный эффект Перрона смены значений характеристических показателей, в котором все нетривиальные решения системы (2) с $m$-возмущением (3) по-прежнему бесконечно продолжимы вправо и имеют конечные положительные показатели Ляпунова при отрицательных показателях системы линейного приближения (1). При этом получены его различные варианты, связанные с построением различных видов множества $\Lambda(A, f) \subset (0, +\infty)$ характеристических показателей нетривиальных решений возмущенной системы (2), распределением решений по показателям из множества $\Lambda(A, f)$ и обобщением на $n$-мерные дифференциальные системы (1) и (2).

В частности, в работах [4, 5] получен континуальный вариант эффекта Перрона с множеством $\Lambda(A,f)\subset(0,+\infty)$ – произвольно заданным отрезком. В работе [6] в рамках полного эффекта Перрона доказано, что показатель $\lambda[y(\cdot,c)]$ всех нетривиальных решений $y(t,c)$ возмущенной системы (2) является функцией 2-го класса Бэра их начальных значений $c\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$, а все множество $\Lambda(A,f)$ показателей этих решений, как множество значений указанной функции Бэра, – суслинским ($A$-множеством) [7, с. 97, 98, 192]. В связи с этим возникает вопрос о реализации в полном эффекте Перрона произвольных ограниченных суслинских множеств ограниченными совокупностями $\Lambda(A,f)\subset(0,+\infty)$ характеристических показателей всех нетривиальных решений системы (2). Положительный и содержащийся в настоящем сообщении ответ на него устанавливает в этом эффекте также полное описание ограниченных совокупностей $\Lambda(A,f)\subset(0,+\infty)$ ограниченными суслинскими множествами.

Справедлива следующая

**Теорема.** *Для любых параметров $m>1$, $\lambda_1\leqslant\lambda_2<0$ и произвольных ограниченных на оси $\mathbb{R}_0=\mathbb{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$ функций*

$$\psi_i\colon\mathbb{R}_0\to[\beta_i,b_i]\subset(0,+\infty),\quad b_1\leqslant\beta_2,\quad i=1,2, \tag{4}$$

*1-го класса Бэра существуют линейная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на полуоси $[t_0,+\infty)$ коэффициентами и показателями $\lambda_1(A)=\lambda_1\leqslant\lambda_2=\lambda_2(A)$ и бесконечно дифференцируемое по своим аргументам $t\geqslant t_0$ и $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ $m$-возмущение $f(t,y)$, такие, что все нетривиальные решения $y(t,c)$ нелинейной системы (2) бесконечно продолжимы вправо и имеют характеристические показатели*

$$\lambda[y(\cdot,c)]=\begin{cases}\psi_1(c_1), & c_1\neq0,\quad c_2=0,\\ \psi_2(c_2), & c_2\neq0,\quad c=(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2.\end{cases}$$

**Следствие.** *Для произвольных параметров $m>1$, $\lambda_1\leqslant\lambda_2<0$ и ограниченного суслинского множества $S\subset(0,+\infty)$ существуют указанные в теореме такие системы (1) и (2), что множество характеристических показателей нетривиальных решений последней совпадает с множеством $S$.*

При доказательстве теоремы используется следующая

**Лемма.** *Пусть ограниченная на оси $\mathbb{R}_0=\mathbb{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$ функция*

$$\psi\colon\mathbb{R}_0\to[\beta_0,b_0]\subset(-\infty,+\infty),\quad \beta_0<b_0, \tag{5}$$

*является функцией 1-го класса Бэра. Тогда для любых постоянных $\beta<\beta_0$ и $b>b_0$ существует последовательность $\{\psi_n(x)\}$ бесконечно дифференцируемых равномерно ограниченных на оси $\mathbb{R}_0$ функций*

$$\psi_n\colon\mathbb{R}_0\to[\beta,b],\quad n\in\mathbb{N}, \tag{6}$$

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

*сходящаяся на этой оси к функции* $\psi(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского (проект Ф18Р-014) и Российского (проект 18-15-00004Бел-а) фондов фундаментальных исследований.

**Литература**

1. Perron O. *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen* // Math. Zeitschr. 1930. Bd 32. H. 5. S. 702–728.

2. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения.* М.; Ижевск, 2006.

3. Izobov N. A. *Lyapunov Exponentsand Stability.* Cambridge, 2012.

4. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Континуальный вариант эффекта перрона смены значений характеристических показателей* // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 17. С. 1427–1439.

5. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Реализация континуального варианта эффекта Перрона смены значений характеристических показателей* // Докл. РАН. 2018. Т. 478. № 4. С. 382–387.

6. Изобов Н. А., Ильин А. В. *О бэровской классификации положительных характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1435–1439.

7. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.; Л., 1937.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/