О КИНЕМАТИЧЕСКОМ И ОБОБЩЕННОМ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ПОДОБИИ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ

О.Ф. Криваль, Е.И. Фоминых

Через $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ обозначим алгебру вещественных $n\times n$-матриц со стандартной топологией (т.е. топологией, порожденной какой-либо матричной нормой). Класс всех кусочно-непрерывных матричнозначных функций $A(\cdot):[0,+\infty)\to\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ обозначим через через $\mathcal{M}_n^*$. Далее матричнозначные функции $A(\cdot)\in\mathcal{M}_n^*$ называем просто матрицами. Подкласс класса $\mathcal{M}_n^*$, состоящий из ограниченных функций, обозначается через $\mathcal{M}_n$ (ограниченность матричнозначной функции $A(\cdot)$ означает, что $\sup\{\|A(t)\|\,:\,t\geqslant 0\}<+\infty$), а подкласс класса $\mathcal{M}_n$, состоящий из непрерывных функций – через $C\mathcal{M}_n$.

Если в линейной однородной дифференциальную системе

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant 0, \tag{1}$$

с матрицей $A(\cdot)\in\mathcal{M}_n^*$ сделать линейную замену переменных $x=L(t)y$ с невырожденной при всех $t\geqslant 0$ и кусочно-дифференцируемой на $[0,+\infty)$ матрицей $L(\cdot)$, то придем к линейной однородной дифференциальной системе

$$\dot{y}=B(t)y,\quad y\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant 0, \tag{2}$$

с матрицей $B(\cdot)$, задаваемой равенством

$$B(t)=L^{-1}(t)A(t)L(t)-L^{-1}(t)\dot{L}(t) \tag{3}$$

(равенство (4) понимается выполненным всюду на $[0,+\infty)$, кроме тех значений t, в которых производная $\dot{L}(t)$ не существует). Кусочно-непрерывные матричнозначные функции $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, связанные соотношением (4), называются кинематически подобными относительно матрицы $L(\cdot)$, а система (1) приводимой к системе (2) преобразованием $x=L(t)y$.

Через $\mathcal{L}_n$ обозначим класс матриц преобразований Ляпунова [1, с. 42], т.е. матриц $L(\cdot)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\sup_{t\geqslant 0}\|L(t)\|<+\infty,\quad \sup_{t\geqslant 0}\|L^{-1}(t)\|<+\infty,\quad \sup_{t\geqslant 0}\|\dot{L}(t)\|<+\infty$$

(в последнем неравенстве supremum берется по всем тем $t\geqslant 0$, в которых производная $\dot{L}(t)$ определена), а через $\mathcal{B}_n^0$ – класс матриц обобщенных преобразований Ляпунова, т.е. матриц $L(\cdot)$, для которых которого выполнены (см., например, [2, с. 88, 92]) соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|L(t)\|=0,\quad \lim_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|L^{-1}(t)\|=0.$$

Очевидно собственное включение: $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{B}_n^0$. Если матрица $L(\cdot) \in \mathcal{L}_n$, то преобразование $x = L(t)y$ называется преобразованием Ляпунова, а матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, связанные соотношением (4), – кинематически подобными. Если же матрица $L(\cdot) \in \mathcal{B}_n^0$, то преобразование $x = L(t)y$ называется обобщенным преобразованием Ляпунова, а матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, связанные соотношением (4), – обобщенно кинематически подобными. Кинематическое подобие матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, следуя [3], обозначим через $A(\cdot) \overset{c}{\sim} B(\cdot)$, а их обобщенное кинематическое подобие, следуя [4], – через $A(\cdot) \overset{gc}{\sim} B(\cdot)$.

Если $L(\cdot)$ – тождественно постоянная матрица, то равенство (4) приводит к обычному подобию матриц, которое в этом случае, как для того, чтобы подчеркнуть, что матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ являются, вообще говоря, переменными, так и для того, чтобы иметь сходное с кинематическим подобием название, называют также [5, с. 93] статическим подобием. Очевидно, что статически подобные матрицы остаются статически подобными после умножения их на один и тот же скаляр. Для отношения кинематического подобия это, если $n \geqslant 2$, вообще говоря, не так: в [3] построен пример таких кинематически подобных матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ из $\mathcal{M}_2$, что, например, матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не являются кинематически подобными.

В работе [3] для пары матриц $(A(\cdot), B(\cdot)) \in \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$ введено множество $c(A, B)$, названное множеством кинематического подобия матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ и состоящее из тех $\mu \in \mathbb{R}$, для которых $\mu A(\cdot) \overset{c}{\sim} \mu B(\cdot)$, и доказано, что класс $\{c(A, B) : A(\cdot), B(\cdot) \in \in \mathcal{M}_n\}$ множеств совпадает с классом F_σ-множеств числовой прямой, содержащих нуль. Хотя определение множеств $c(A, B)$ ограничено в [3] только классом $\mathcal{M}_n$ матриц, но очевидно, что это определение без изменений переносится и на класс $\mathcal{M}_n^*$, и более того, при таком расширенном понимании этого определения для класса множеств $\{c(A, B) : A(\cdot), B(\cdot) \in \mathcal{M}_n^*\}$ справедлив тот же результат, в чем несложно убедиться, проверив, что доказательство необходимости этого результата в [3] не использует ограниченности матриц.

В силу сказанного, следуя [3] и [4], назовем множеством $gc(A, B)$ обобщенного кинематического подобия матриц $A(\cdot)$, $B(\cdot) \in \mathcal{M}_n^*$ множество, состоящее из тех $\mu \in \in \mathbb{R}$, для которых $\mu A(\cdot) \overset{gc}{\sim} \mu B(\cdot)$. То, что для кинематически подобных матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ в общем случае справедливо неравенство $gc(A, B) \neq \mathbb{R}$, вытекает из упомянутого выше примера из [3]: его матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не только не являются кинематически подобными, но и не являются обобщенно кинематически подобными. Очевидно включение $c(A, B) \subset gc(A, B)$. То, что это включение является собственным, установлено в докладе [4], в котором для любого $n \geqslant 2$ построен пример таких кинематически подобных матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ из класса $C\mathcal{M}_n$, что матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не являются кинематически подобными, но являются обобщенно кинематически подобными. Пример работы [4] обобщает следующая

Теорема. *Для любого $n \geqslant 2$ существуют счетное множество $M \subset \mathbb{R}$ и в классе $C\mathcal{M}_n$ кинематически подобные матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, такие, что для любого $\mu \in \in M$ матрицы $\mu A(\cdot)$ и $\mu B(\cdot)$ не являются кинематически подобными, но являются обобщенно кинематически подобными.*

Литература

1. Ляпунов А. М. *Собр. соч.* В 6-ти т. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

2. Адрианова Л. Я. *Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений.* СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1992.

3. Барабанов Е. А. *Кинематическое подобие линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. С. 42–63.

4. Худякова П.А. *Об обобщенном кинематическом подобии матричнозначных функий с вещественным параметром-множителем* // Материалы Междунар. конф. «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», Минск, 7–10 декабря 2015 г. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2015. Ч. 1. С. 48–50.

5. Чезари Л. *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Мир, 1964.