РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗОБОВА–БОГДАНОВА О МНОЖЕСТВАХ НЕПРАВИЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.В. Липницкий

Рассмотрим зависящую от параметра $\mu \in \mathbb{R}$ линейную систему

$$\dot{x} = \mu C(t)x, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0 \tag{1_μ}$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов. Множеством неправильности системы

$$\dot{x} = C(t)x, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0 \tag{2_C}$$

называется [1] множество тех значений $\mu \in \mathbb{R}$, при которых соответствующая система (1_μ) неправильна.

Е.К. Макаровым (см. библиогр. в [1]) построены примеры линейных систем (2) с различными метрическими и топологическими свойствами их множеств неправильности, в частности, имеющие любую наперед заданную меру Лебега [2]. Позднее Е.А. Барабанов [3] установил, что любое не содержащее нуля открытое множество вещественной прямой реализуется как множество неправильности некоторой системы (2). В работе [4] аналогичный результат получен для замкнутых множеств. В настоящем докладе полностью описано строение множеств неправильности систем (2), что решает задачу Н.А. Изобова из [1].

Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ матрицу поворота на угол φ по часовой стрелке обозначим через $U(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, и положим

$$J := U(2^{-1}\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для всякого $y = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ и 2×2-матрицы Z используем обозначения $\|y\| \equiv \equiv \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ евклидовой нормы и $\|Z\| \equiv \max\limits_{\|y\|=1} \|Zy\|$ спектральной нормы.

Для любой строго возрастающей последовательности $\{m_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{N}$ и чисел $5 \leqslant \leqslant i_k \in \mathbb{N}$ определим последовательность $\{T_k\}_{k=1}^{+\infty}$, полагая $T_1 := 2$, $T_{k+1} := m_k(i_k+2)T_k$, $k \in \mathbb{N}$. Положим также $\theta_k := m_k i_k T_k$, $\tau_k := \theta_k + m_k T_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Для любой последовательности $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ и числа $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, определим матрицу $A(\cdot) = A(\cdot, d, \{m_k, i_k, b_k\}_{k=1}^{\infty})$, для всех $l = \overline{1, T_k}$, $k \in \mathbb{N}$ полагая $A(t) \equiv b_k J$, $t \in (\tau_k - m_k l, \tau_k - m_k l + 1]$, $A(t) \equiv -b_k J$, $t \in [\tau_k + m_k l - 1, \tau_k + m_k l)$. Для всех остальных $t \geqslant 0$ полагаем $A(t) \equiv d\,\mathrm{diag}\,[1, -1]$.

Обозначим через $X_A(t,s)$ матрицу Коши системы (2_A) и определим число $\delta(d)$ в случае если $d > 0$ равенством $\delta(d) := 1$, а в случае, когда $d < 0$, положим $\delta(d) := 2$. Обозначим также $L_d(\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_{3-\delta(d)}/x_{\delta(d)}| \leqslant \alpha\}$. Заметим, что

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} L_d(\alpha) = L_d(m^{-2\,\mathrm{sgn}\,d}\alpha).$$

Лемма 1. *Матрица* $X_A(T_{k+1},\theta_k)$ *– самосопряженная.*

Для каждого $d\neq 0$ определим $k_0(d)\in\mathbb{N}$ равенством $k_0(d):=2+[|d|^{-1}]$ (через $[\cdot]$ обозначена целая часть числа).

Лемма 2. *Для любого* $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant k_0(d)-1$, *справедливо включение*

$$X(T_{k+1},T_{k_0(d)})e_{\delta(d)}\subset L_d(2e^{4m_kT_k|d|}).$$

Введем обозначение $\hat{Y}_\varkappa(\gamma):=U(\gamma)\mathrm{diag}\,[e^{\varkappa},e^{-\varkappa}]$, $\gamma,\varkappa\in\mathbb{R}$.

Лемма 3. *Для любых* $\gamma,\varkappa\in\mathbb{R}$ *таких, что* $|\cos\gamma|\leqslant e^{-2|\varkappa|}$, *верна оценка*

$$\|\hat{Y}^2_\varkappa(\gamma)\|<e^2.$$

Лемма 4. *Если* $d\neq 0$ *и найдутся* $l\in\mathbb{N}$ *и последовательность* $(k_j)_{j=1}^{+\infty}\subset\subset\mathbb{N}$ *такие, что для любого* $p\in(k_j)_{j=1}^{+\infty}$ *выполняются неравенства* $i_p\leqslant l$, $m_p\geqslant\geqslant 2\max\{l,|d|^{-1}\}$ *и оценка* $|\cos b_p|<e^{-2m_p|d|}$, *то система* (2_A) *неправильна по Ляпунову.*

Обозначим $\tilde{L}_\varkappa:=L_{\mathrm{sgn}\,\varkappa}(2^3\varkappa^2)$, $\varkappa\in\mathbb{R}$, $\hat{L}_{k,d}:=L_d\left(2^3d^2(m_k-1)^2\right)$.

Лемма 5. *Для любых* $\gamma,\varkappa\in\mathbb{R}$, $|\sin\gamma|\geqslant\varkappa^{-2}$, $\varkappa>2^4$, *имеет место включение* $\hat{Y}_\varkappa(\gamma+\pi/2)\tilde{L}_\varkappa\subset\tilde{L}_\varkappa$, *а для любого* $x\in\tilde{L}_\varkappa$ *– неравенство*

$$\|\hat{Y}_\varkappa(\gamma+\pi/2)\,x\|>\|x\|\,e^{\varkappa-\sqrt{\varkappa}}.$$

Лемма 6. *Для любых* $d\neq 0$, $k\in\mathbb{N}$ *таких, что* $m_k>1+2^4|d|^{-1}$, $|\cos b_k|\geqslant\geqslant d^{-2}(m_k-1)^{-2}$, *выполняется включение* $X_A(T_{k+1},\theta_k-m_k+1)\hat{L}_{k,d}\subset\hat{L}_{k,d}$, *а для всякого решения* $x(\cdot)$ *системы* (2_A) *с начальным условием* $x(\theta_k-m_k+1)\in\hat{L}_{k,d}$ *при любых* $1\leqslant l\leqslant 2T_k$ *имеет место оценка*

$$\frac{\|x(\theta_k+m_kl)\|}{\|x(\theta_k+m_k(l-1))\|}\geqslant e^{|d|(m_k-1)-\sqrt{|d|(m_k-1)}}.$$

Лемма 7. *Если* $m_k\to+\infty$ *при* $k\to+\infty$ *и для любого* $l\in\mathbb{N}$ *найдется* $k_l\in\mathbb{N}$ *такое, что для всех* $k\geqslant k_l$, *удовлетворяющих условию* $i_k\leqslant l$, *выполняется оценка* $|\cos b_k|>|d|^{-2}(m_k-1)^{-2}$, *то система* (2_A) *правильна по Ляпунову.*

Пусть M – произвольное $G_{\delta\sigma}$ множество. Найдутся открытые множества $\check{M}_{n,l}\subset\subset\mathbb{R}$, $l,n\in\mathbb{N}$, такие что множества $\tilde{M}_l$, $l\in\mathbb{N}$, определенные равенствами $\tilde{M}_l:=:=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\check{M}_{n,l}$, удовлетворяют соотношению $M=\bigcup_{l=1}^{+\infty}\tilde{M}_l$. Обозначим $\hat{M}_{n,l}:=\bigcap_{p=1}^{n}\check{M}_{p,l}$.

Определим рекуррентно последовательность $\{j_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, полагая $j_0:=0$ и $j_n:=2n9^{n+n^3}+j_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Для любых $k,l,n\in\mathbb{N}$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ обозначим

$$J_n:=\{j_{n-1}+1,\ldots,j_n\},\quad \varkappa_k(n):=9^{-n-n^3}\left(k-2^{-1}(j_n+j_{n-1})\right),$$

$$\rho_{n,l}(\alpha)=\rho_{n,l}(\alpha,\hat{M}_{n,l}):=\inf_{\beta\in\mathbb{R}\setminus\hat{M}_{n,l}}|\alpha-\beta|.$$

Обозначим также через $I_{n,k}=I_{n,k}(\{\hat{M}_{n,l}\}_{n,l\in\mathbb{N}})$ множество тех $l\in\mathbb{N}$, что либо $\rho_{n,l}(\varkappa_k(n))\geqslant 2n^{-1}$, либо найдется $p\in\{1,\ldots,n-1\}$ такое, что

$$2n^{-1}\leqslant\rho_{p,l}(\varkappa_k(n))\leqslant 5n^{-1}.$$

Лемма 8. *Для любых* $\mu \notin M$ *и* $l \in \mathbb{N}$ *найдется* $n_0 = n_0(\mu, l) \in \mathbb{N}$ *такое, что при любом* $n \geqslant n_0$ *выполнение для некоторого* $k \in J_n$ *неравенства* $|\mu - \varkappa_k(n)| < 2n^{-1}$ *влечет за собой включение* $l \notin I_{n,k}$.

Для любого натурального k найдется единственное $n = n(k) \in \mathbb{N}$, такое что $k \in \in J_n$. Определим значения m_k, i_k и b_k, зависящие от выбора открытых множеств $\check{M}_{n,l} \subset \mathbb{R}$, $l, n \in \mathbb{N}$, таких что $M = \bigcup_{l=1}^{+\infty} \bigcap_{n=1}^{+\infty} \check{M}_{n,l}$, равенствами $d := \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, $m_k := := 1 + n(k)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $i_k := \max\{5, \min I_{n,k}\}$, $b_k(\mu) := 2^{-1}\pi + n^{-1}(\mu - \varkappa_k(n))$, $\mu \in \mathbb{R}$, в случае если $I_{n,k} \neq \varnothing$, и пусть $i_k := 5$, $b_k(\mu) \equiv 0$, если $I_{n,k} = \varnothing$.

Определим матрицу $\tilde{A}_\mu(\cdot) = \tilde{A}_\mu(\cdot, \{\hat{M}_{n,l}\}_{n,l \in \mathbb{N}})$, $\mu \in \mathbb{R}$, равенством $\tilde{A}_\mu(t) := A(t) = = A(t, d, \{m_k, i_k, b_k\}_{k=1}^{\infty})$, $t \geqslant 0$, с определенными выше значениями параметров d, m_k, i_k и b_k.

Лемма 9. *Если* $0 \notin M$, *то система* $(2_{\tilde{A}_\mu})$ *неправильна по Ляпунову при любом* $\mu \in M$ *и правильна при всех остальных* $\mu \in \mathbb{R} \backslash M$.

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех $t \in \mathbb{R}_+ := \mathbb{R} \bigcap [0, +\infty)$ таких, что $\tilde{A}_\mu(t) = = \mu \operatorname{diag}[1, -1]$.

Для каждого $t \in \mathcal{T}$ определим функцию $\omega(\cdot)$ равенством $\omega(t) \equiv 0$. Для всех остальных $t \in [T_k, T_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, полагаем $q_t := 0$ если $t < \tau_{k,j}$, $q_t := 1$ в противном случае, и пусть $\omega(t) := (-1)^{q_t} b_k(0)$. Определим матрицу $C(t)$, $t \geqslant 0$, соотношениями

$$C(t) := U^{-1}(\tau) \left(\tilde{A}_1(t) U(\tau) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(\tau) \right), \quad t \geqslant 0, \quad \tau = \tau(t) := \int\limits_0^t \omega(s)\, ds. \qquad (3)$$

Теорема. *Для любого* $G_{\delta\sigma}$ *множества* $M \subset \mathbb{R}$, $0 \notin M$, *система* (1_μ) *с матрицей* $C(\cdot)$, *заданной равенством (4), неправильна по Ляпунову при всех* $\mu \in M$ *и правильна при всех остальных* $\mu \in \mathbb{R}$.

Литература

1. Изобов Н. А. *Исследования в Белоруссии по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2034–2055.

2. Макаров Е. К. *О мере множества неправильности линейной системы с параметром при производной* // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33. № 4. С. 302–305.

3. Барабанов Е. А. *О множествах неправильности семейств линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1067–1084.

4. Липницкий А. В. *Замкнутые множества неправильности линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 2. С. 189–194.