О СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ БЭРОВСКИМИ КЛАССАМИ ФОРМУЛ

А.В. Равчеев

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ пространство линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывными ограниченными оператор-функциями A (отождествляемыми с соответствующими системами), которое мы наделим компактно-открытой топологией.

Определение 1 [1]. Будем говорить, что функционал $\varphi\colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$ *имеет компактный носитель*, если существует такое $T > 0$, что для любой пары оператор-функций $A, B \in \mathcal{M}^n$, совпадающих на отрезке $[0, T]$, выполнено равенство $\varphi(A) = \varphi(B)$. Множество всех функционалов с компактным носителем (определенных на $\mathcal{M}^n$) обозначим через $\mathfrak{K}^n$.

Замечание 1. В докладе [1] эти функционалы названы ограниченно зависимыми.

Функционалы на $\mathcal{M}^n$, отвечающие за те или иные аспекты асимптотического поведения решений системы (1), обычно выражаются формулами, содержащими несколько предельных переходов от последовательностей «более простых» функционалов. Желание вычислять значения этих функционалов, пользуясь информацией о системе лишь на конечных участках временной полуоси, приводит к естественному требованию компактности их носителей [1].

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторая совокупность функционалов $\mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$. Для всякого счетного порядкового числа α определим множество $[\mathcal{F}]_\alpha$ по индукции следующим образом: 1) $[\mathcal{F}]_0 = \mathcal{F}$; 2) $[\mathcal{F}]_\alpha$ состоит из функций $\varphi : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$, представимых в виде $\varphi(\mu) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}^n$, где $\varphi_k \in \bigcup_{\xi<\alpha}[\mathcal{F}]_\xi$, $k \in \mathbb{N}$. Определим теперь *бэровский класс формул* $\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta}$ равенством (ср. [1])

$$\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta} = [[\mathfrak{C}^n]_\alpha \bigcap \mathfrak{K}^n]_\beta,$$

где $\mathfrak{C}^n$ – множество всех непрерывных функционалов $\mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$.

Возникает естественный вопрос: какие включения имеются между введенными классами? Частичный ответ содержит следующая

Теорема 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и всяких счетных порядковых чисел α, β, γ и δ справедливы следующие утверждения:*

1) если $\alpha \leqslant \gamma$ и $\beta \leqslant \delta$, то $\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta} \subset \mathfrak{F}^n_{\gamma,\delta}$;

2) если $\alpha + \beta < \gamma + \delta$, то $\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta} \not\supset \mathfrak{F}^n_{\gamma,\delta}$;

3) если $\beta < \delta$, то $\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta} \not\supset \mathfrak{F}^n_{\gamma,\delta}$.

Определение 2. Функционал на $\mathcal{M}^n$, принимающий одинаковые значения на любых ляпуновски эквивалентных системах [2, с. 63], будем называть *ляпуновским инвариантом*. Множество всех ляпуновских инвариантов обозначим через $\mathfrak{L}^n$.

В работе [3] установлено, что количество предельных переходов от (мультииндексной) последовательности непрерывных функционалов в формуле для ляпуновского инварианта, вообще говоря, нельзя уменьшить, заменив допредельные функционалы в ней функционалами с компактным носителем, при этом разрешив последним быть разрывными, а именно, для всякого $\alpha \geqslant 1$ установлено включение $[\mathfrak{K}^n]_\alpha \not\supset$ $\not\supset [\mathfrak{C}^n]_{\alpha+1} \bigcap \mathfrak{L}^n$. Следующая теорема дополняет это утверждение.

Теорема 2. *Для всякого $\alpha \geqslant 2$ справедливо включение $[\mathfrak{K}^n]_\alpha \bigcap \mathfrak{L}^n \subset [\mathfrak{C}^n]_{\alpha+1}$.*

Замечание 2. В работе [3] показано, что класс $[\mathfrak{K}^n]_1 \bigcap \mathfrak{L}^n$ состоит из одних констант.

Литература

1. Сергеев И. Н. *Бэровские классы формул для показателей линейных систем* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 12. С. 2092–2093.

2. Адрианова Л. Я. *Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений.* СПб.: Изд-во С.Петербургского ун-та, 1992.

3. Быков В. В. *О классах Бэра ляпуновских инвариантов* // Мат. сб. 2017. Т. 208. № 5. С. 38–62.