ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРРОНОВСКОЙ И ЛЯПУНОВСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

И.Н. Сергеев

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ будем рассматривать *непродолжаемые* решения систем вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) \equiv 0, \quad 0, x \in G, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0,\infty), \tag{1}$$

где $f, f'_x \in C(\mathbb{R}^+ \times G)$, а G – произвольная область в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1 [1]. Назовем систему (1):

1) *устойчивой* (*асимптотически*) *по Перрону*, если для любого $\varepsilon > 0$ (соответственно, для $\varepsilon = 0$) существует такое $\delta > 0$, что любое решение x с начальным условием $|x(0)| < \delta$ удовлетворяет неравенству

$$\varliminf_{t \to \infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon; \tag{2}$$

2) *неустойчивой по Перрону*, если оно не устойчиво по Перрону (для решения x, определенного не на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, неравенство (2) считаем не выполненным по определению).

Введенные здесь *перроновские* свойства аналогичны *ляпуновским* свойствам *устойчивости* (*асимптотической*) и *неустойчивости* соответственно [2, гл. II, §1].

Определение 2. Если системе (1) можно поставить в соответствие *линейную* систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \equiv f'_x(t,0) \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t,x) - A(t)x| = o(x), \quad x \to 0, \tag{3}$$

то правую часть системы (4) назовем *линейным приближением* для системы (1). Скажем, что линейное приближение *обеспечивает* какое-либо из рассматриваемых нами свойств, если им обладает всякая система (1) с этим линейным приближением.

Исследованию асимптотической устойчивости по линейному приближению, составляющему суть *первого метода Ляпунова*, посвящено огромное число работ (см. монографию [3, §11] и приведенную в ней библиографию).

Усточивость по Перрону, даже асимптотическая, не влечет за собой устойчивости по Ляпунову, а тем более асимптотической. Тем не менее все эти четыре вида устойчивости обеспечиваются в точности *одними и теми же* линейными приближениями, о чем и говорит

Теорема 1. *Если линейное приближение обеспечивает хотя бы одно из свойств:*

1) устойчивость по Перрону;

2) устойчивость по Ляпунову;

3) асимптотическую устойчивость по Перрону;

4) асимптотическую устойчивость по Ляпунову,

то оно обеспечивает и остальные три свойства.

Неустойчивость по Ляпунову не влечет за собой неустойчивости по Перрону, причем это утверждение распространяется и на линейные приближения, обеспечивающие неустойчивость по Перрону и соответственно неустойчивость по Ляпунову, как показывает

Теорема 2. *Существует одномерная ограниченная линейная система, которая:*

1) обеспечивает неустойчивость по Ляпунову;

2) не обеспечивает неустойчивости по Перрону;

3) асимптотически устойчива по Перрону, поэтому она не обеспечивает даже отсутствия асимптотической устойчивости по Перрону.

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

2. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

3. Изобов Н.А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.