ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПО ПЕРРОНУ И ПО ЛЯПУНОВУ

И.Н. Сергеев

Введение. Для заданной *фазовой* окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) = 0, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}^+ \times G), \quad \mathbb{R}^+ \equiv [0,\infty), \tag{1}$$

допускающую *нулевое решение*. Через $\mathcal{S}_*(f)$ и $\mathcal{S}_\delta(f)$ или $\mathcal{S}^\delta(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых ненулевых* решений x системы (1) и соответственно подмножества тех из них, что удовлетворяют начальным условиям $|x(0)| < \delta$ или $|x(0)| < \delta$.

Определение 1 [1–5]. Характеристическими *показателями Ляпунова* (1892 г.) и *Перрона* (1930 г.) функции $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ называются соответственно величины

$$\lambda(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|x(t)|, \quad \pi(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|x(t)| \qquad (\ln 0 \equiv \infty).$$

Настоящий доклад посвящен понятию *устойчивости по Перрону*, возникшему совсем недавно (2018 г.) в результате попытки по возможности более точно определить, за какие именно свойства решений дифференциальной системы отвечают ее *показатели Перрона*.

Отрицательность показателей Перрона всех ненулевых решений системы (1) обычно ассоциируется, хотя и не совсем точно [6, гл. IV], с *положительной устойчивостью по Пуассону* ее нулевого решения, формально состоящую в сколь угодно позднем *возвращении* фазовой траектории в любую наперед заданную окрестность своей начальной точки. Положительность же всех показателей Перрона напоминает, причем весьма отдаленно [6, гл. IV], *полную неустойчивость* соответствующей динамической системы, обладающей, по определению, тем свойством, что каждая ее точка является *блуждающей*, т. е. некоторая ее перемещающаяся со временем окрестность с какого-то момента окончательно перестает пересекать свое начальное положение.

Результаты доклада частично доказаны или только анонсированы в работах [7–12].

1. Перроновская устойчивость. Далее в центре нашего внимания будут находиться *следующие* свойства и понятия, относящиеся к рассматриваемым системам.

Определение 2 [7, 8]. Скажем, что для системы (1) имеет место следующее *перроновское свойство устойчивости*:

1) *устойчивость по Перрону*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to\infty} |x(t)| < \varepsilon \tag{2}$$

(если решение определено не на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, то требование (2), равно как и требование (3) ниже, считаем *невыполненным* по определению);

2) *асимптотическая устойчивость по Перрону*, если существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to\infty} |x(t)| = 0; \tag{3}$$

3) *неустойчивость по Перрону*, если нет устойчивости по Перрону;

4) *полная неустойчивость по Перрону*, если существуют такие $\varepsilon, \delta > 0$, что ни одно решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2).

Введенные перроновские свойства устойчивости характеризуют поведение решений, близких к нулевому решению, с точки зрения или их *сколь угодно позднего сближения* с ним, или наоборот, *окончательного удаления* от него. Кроме того, все они носят чисто *локальный* характер, т. е. зависят от поведения только тех решений, которые начинаются вблизи нуля.

Теорема 1 [7, 9]. *Существует вполне неустойчивая по Перрону двумерная система (1), хотя бы одно решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ которой удовлетворяет требованию (4) и даже условию*

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0. \tag{4}$$

Теорема 2 [7, 9]. *Существует неустойчивая по Перрону двумерная автономная система (1), все решения $x \in \mathcal{S}^\delta(f)$ которой для некоторого $\delta > 0$ удовлетворяют условию (4).*

2. Естественные логические связи. Связь перроновских свойств устойчивости со знаками показателей Перрона *аналогична* связи ляпуновских свойств с показателями Ляпунова.

Определение 3 [3]. Для каждого из четырех перроновских свойств устойчивости из определения 2 установим его *ляпуновский* аналог: *устойчивость*, *асимптотическую устойчивость*, *неустойчивость* и *полную неустойчивость* (последнее понятие не является общепринятым) *по Ляпунову*, – все они получаются заменой нижнего предела в требованиях (2) или (4) точной верхней гранью или соответственно точным пределом с добавлением условия устойчивости по Ляпунову.

Теорема 3 [7]. *Если для некоторого $\delta > 0$ показатели Перрона (Ляпунова) всех решений $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ системы (1) отрицательны, то она асимптотически устойчива по Перрону (соответственно по Ляпунову, правда, при дополнительном условии устойчивости по Ляпунову), а если положительны, то вполне неустойчива по Перрону (по Ляпунову).*

Перроновские и ляпуновские свойства устойчивости *логически связаны* друг с другом.

Теорема 4 [7, 8]. *Любая система (1):*

1) либо устойчива по Перрону (по Ляпунову), либо неустойчива;

2) если асимптотически устойчива по Перрону (по Ляпунову), то и устойчива, а если вполне неустойчива, то и неустойчива;

3) если устойчива (асимптотически) по Ляпунову, то и по Перрону, а если неустойчива (вполне) по Перрону, то и по Ляпунову.

Теорема 5 [7, 10]. *Любое сочетание свойств устойчивости по Перрону и по Ляпунову, не противоречащее теореме 4, реализуется на некоторой линейной системе*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|A(t)\| < \infty. \tag{5}$$

Теорема 6 [7, 10, 11]. *Существует вполне неустойчивая по Ляпунову, но асимптотически (неасимптотически) устойчивая по Перрону линейная система (5), все показатели Ляпунова которой положительны, а все показатели Перрона отрицательны (равны нулю).*

Различие между перроновской и ляпуновской устойчивостью – тоньше, чем между соответствующими показателями (совпадающими на решениях *правильных* систем [3, гл. III]).

Теорема 7 [7, 10]. *Существует правильная линейная система (5), асимптотически устойчивая по Перрону, но вполне неустойчивая по Ляпунову.*

Как известно, отрицательность показателей Ляпунова *фундаментальной* системы решений *линейной* системы достаточна для асимптотической устойчивости по Ляпунову. Однако отрицательность аналогичных показателей Перрона не достаточна даже для устойчивости по Перрону, равно как и их положительность – для полной неустойчивости по Перрону.

Теорема 8 [7, 10, 11]. *Существует неустойчивая (не вполне неустойчивая) по Перрону линейная система (5), для которой показатели Перрона всех решений из некоторой ее фундаментальной системы отрицательны (соответственно, положительны).*

3. Автономный случай. Для *автономных* систем логические связи между различными свойствами устойчивости оказываются несколько более жесткими.

Теорема 9. *Одномерная автономная система устойчива (асимптотически) или соответственно неустойчива (вполне) по Перрону тогда и только тогда, когда она устойчива (асимптотически) или неустойчива (вполне) по Ляпунову.*

Теорема 10 [7, 8, 10]. *Линейная автономная система устойчива (асимптотически) или соответственно неустойчива (вполне) по Перрону тогда и только тогда, когда она устойчива (асимптотически) или неустойчива (вполне) по Ляпунову.*

Теорема 11 [7, 8]. *Автономная система вполне неустойчива по Перрону тогда и только тогда, когда она вполне неустойчива по Ляпунову, а также, когда для некоторого* $\varepsilon > 0$ *ни одно ее решение* $x \in \mathcal{S}_*(f)$ *не удовлетворяет требованию (2).*

Теорема 12 [7]. *Если автономная система (1) вполне неустойчива по Перрону, то для некоторого* $\varepsilon(f) > 0$ *и любого* $\delta \in (0, \varepsilon(f))$ *существуют такие* $\varepsilon, T > 0$, *что все решения* $x \in \mathcal{S}^\delta(f)$ *удовлетворяют условиям*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}^+} |x(t)| > \varepsilon, \qquad \sup_{t\in[0,T]} |x(t)| > \varepsilon(f).$$

И все же перроновские и ляпуновские свойства автономных систем *не идентичны.*

Теорема 13. *Существует двумерная автономная система (1), неустойчивая по Ляпунову, но асимптотически устойчивая по Перрону, все решения* $x \in \mathcal{S}_*(f)$ *которой к тому же удовлетворяют условию (4).*

4. Линейное приближение. Одним из основных (и довольно продвинутых, см. [4, §11]) *методов Ляпунова* считается исследование устойчивости по *первому приближению.*

Определение 4 [3, 4]. Пусть в системе (1) выделена *линейная* часть

$$f(t,x) \equiv A(t)x + h(t,x), \quad A(t) \equiv f'_x(t,0), \tag{6}$$

при дополнительном условии *равномерной малости* нелинейной добавки

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |h(t,x)| = o(x), \quad x \to 0. \tag{7}$$

Тогда соответствующую линейную систему назовем ее *первым приближением*, а если всякая система (6) с данным первым приближением обладает данным перроновским (ляпуновским) свойством устойчивости, то скажем, что это первое приближение *обеспечивает* это свойство.

Без требования равномерной малости добавки последнее понятие в этом определении оказывается совершенно *бессодержательным*.

Теорема 14 [10, 12]. *Если в определении 4 снять условие (7), то никакое первое приближение не обеспечит ни одного из перроновских или ляпуновских свойств устойчивости.*

Оказывается, все свойства устойчивости, в отличие от свойств неустойчивости, обеспечиваются в точности *одними и теми же* первыми приближениями.

Теорема 15 [7, 10, 12]. *Если данное первое приближение обеспечивает хотя бы одно из четырех свойств: устойчивость или асимптотическую устойчивость по Перрону или устойчивость или асимптотическую устойчивость по Ляпунову, – то оно обеспечивает и остальные три.*

Теорема 16 [10, 12]. *Существует асимптотически устойчивая по Перрону линейная система (5), обеспечивающая полную неустойчивость по Ляпунову.*

Теорема 17 [10, 12]. *Существует не вполне неустойчивая ни по Перрону, ни по Ляпунову линейная система (5), обеспечивающая неустойчивость и по Перрону, и по Ляпунову.*

5. Зависимость от фазовой области. Все четыре ляпуновских свойства и два свойства перроновской неустойчивости инвариантны относительно уменьшения фазовой области системы, а остальные два свойства *перроновской устойчивости* уже *не инвариантны*.

Теорема 18 [10]. *При сужении системы (1) автономной системы на любую ее фазовую подобласть свойства устойчивости (асимптотической) по Ляпунову, а также неустойчивости (полной) по Перрону или по Ляпунову не нарушаются.*

Теорема 19 [10]. *Существует такая асимптотически устойчивая по Перрону система (1) с исходной фазовой областью $\mathbb{R}^n$, что выкалывание любой одной ненулевой точки $x \in \mathbb{R}^n$ приводит к неустойчивости по Перрону, а ее сужение на любую ограниченную фазовую подобласть $G \subset \mathbb{R}^n$ приводит к полной неустойчивости по Перрону.*

Уменьшение фазовой области *автономной* системы дает существенно меньший эффект.

Теорема 20. *Никакое сужение не вполне неустойчивой по Перрону автономной системы на ее фазовую подобласть не приводит к ее полной неустойчивости по Перрону.*

Теорема 21. *Существует такая асимптотически устойчивая по Перрону двумерная автономная система с исходной фазовой областью $\mathbb{R}^n$, что для любой достаточно малой окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ ее сужение на подобласть G или даже выкалывание некоторой одной ненулевой точки $x \in \mathbb{R}^n$ приводит к ее неустойчивости по Перрону.*

В качестве примера, подтверждающего справедливость сразу двух теорем 13 и 21, годится *классическая* система из [13, §18].

Наиболее *содержательными* сочетаниями перроновских и ляпуновских свойств, реализуемых на одной системе (см. теорему 5), нам представляются следующие два:

1) асимптотическая устойчивость по Перрону вместе с устойчивостью по Ляпунову;

2) полная неустойчивость по Перрону (а тогда и по Ляпунову).

Добавление в первом сочетании устойчивости по Ляпунову является *оправданным*.

Теорема 22. *Если система неустойчива (вполне) по Ляпунову, то ее сужение на некоторую фазовую подобласть приводит к неустойчивости (полной) и по Перрону.*

Несмотря на обнаруженную в теоремах 19, 21 и 22 *зависимость* перроновских свойств от фазовой области, основное понятие из определения 4 оказывается все-таки *инвариантным* относительно выбора фазовой области (а значит, и самого факта ее фиксации).

Теорема 23. *Если первое приближение обеспечивает какое-либо из перроновских или ляпуновских свойств устойчивости для некоторой фиксированной фазовой области, то оно обеспечивает то же свойство и для любой другой фазовой области.*

Литература

1. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* М.: Изд-во АН СССР, 1948.

2. Perron O. *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme* // Math. Z. 1930. Bd 31. S. 748–766.

3. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

4. Изобов Н.А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.

5. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.

6. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* М.: Гостехиздат, 1949.

7. Сергеев И.Н. *Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.

8. Сергеев И.Н. *Определение устойчивости по Перрону и ее связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

9. Сергеев И.Н. *Об исследовании на устойчивость по Перрону одномерных и автономных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1561–1562.

10. Сергеев И.Н. *Устойчивость по Перрону и ее исследование по первому приближению* // Докл. РАН. 2019. Т. 486. № 1.

11. Сергеев И.Н. *Исследование на устойчивость по Перрону линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1571–1572.

12. Сергеев И.Н. *Об исследовании по первому приближению перроновских и ляпуновских свойств устойчивости* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6.

13. Филиппов А.Ф. *Введение в теорию дифференциальных уравнений.* М.: Едиториал УРСС, 2004.