КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИЗОХРОННЫЕ ЦЕНТРЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА

В.В. Амелькин, А.Е. Руденок

Рассмотрим систему Льенара

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = A(x) - B(x)y \tag{1}$$

в предположении, что вещественные голоморфные в точке $x = 0$ функции A и B удовлетворяют условиям $A(0) = B(0) = 0$ и $A'(0) = 1$.

Как известно, особая точка $O(0,0)$ системы (1) является либо центром, либо негрубым фокусом.

Определение. Центр $O(0,0)$ системы (1) называется изохронным, если период каждой замкнутой траектории из области этого центра равен 2π.

Теорема 1 [1, теорема 17]. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ системы (1) была изохронным центром, необходимо и достаточно существование голоморфной в точке $x = 0$ функции α и нечетной голоморфной в точке $x = 0$ функции γ таких, чтобы:*

1) $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) = 1$, $\gamma(0) = 0$;

2) имели место представления

$$A(x) = \alpha(x)\alpha'(x)(1 + \gamma^2(\alpha(x))), \quad B(x) = \alpha'(x)(2\gamma(\alpha(x)) + \alpha(x)\gamma'(\alpha(x)));$$

3) выполнялось равенство

$$\alpha^{-1}(u) = u + \phi(u), \quad \phi(-u) = \phi(u),$$

где α^{-1} – функция, обратная к функции α.

Пример. Система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = \frac{x(1+ax)(1+2ax+2a^2x^2)(1+4ax+4a^2x^2+k^2x^2+2ak^2x^3+a^2k^2x^4)}{(1+2ax)^5} -$$

$$- \frac{3kx(1+ax)(1+2ax+2a^2x^2)}{(1+2ax)^3}y,$$

где $a \neq 0$, $k \neq 0$ – вещественные постоянные, является системой с изохронным центром. При ее построении функции α, α^{-1} и γ определялись соответственно равенствами

$$\alpha(x) = \frac{x(1+ax)}{1+2ax}, \quad \alpha^{-1}(u) = \frac{-1+2au+\sqrt{1+4a^2u^2}}{2a}, \quad \gamma(u) = ku.$$

Теорема 2. *Система дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = \frac{(1+2kx+2k^2x^2)(x^4(1+kx)^4+(1+2kx)^4R^2(s(x)))}{x^3(1+kx)^3(1+2kx)^3} - \frac{(1+2kx)R'(s(x))}{x(1+kx)^3}y,$$

где $k \in \mathbb{R}$, $s(x) = x/(1+kx)$, R – нечетная рациональная функция такая, что $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$, имеет в особой точке $O(0,0)$ изохронный центр.

Литература

1. Амелькин В. В., Руденок А. Е. *Центры и изохронные центры систем Льенара* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 294–303.