НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М.С. Белокурский

Пусть $z = (z_n) = (z(n))$ $(n \in \mathbb{N})$ – l-мерная векторная функция (последовательность), определенная на $\mathbb{N}$ со значениями в $\mathbb{R}^l$, т.е. $z : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^l$. Множество таких последовательностей обозначим через S^l. Следуя [1, с. 69], введем следующее

Определение. Последовательность $z \in S^l$ называется периодической с периодом $\omega \in \mathbb{N}$ (ω-периодической), если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $z_{n+\omega} = z_n$.

Множество l-мерных ω-периодических последовательностей обозначим через PS^l_ω.

Как известно [2], нелинейное скалярное периодическое обыкновенное дифференциальное уравнение не имеет отличных от постоянных периодических решений таких, что периоды решения и уравнения несоизмеримы. Более того, Н.П. Еругин в работе [3] доказал, что такого рода решения отсутствуют у линейной нестационарной периодической системы двух уравнений.

Вполне естественно поставить вопрос для двухмерного случая: имеет ли место дискретный аналог отмеченной выше теоремы Н.П. Еругина для линейной системы

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n y_n, \quad y_{n+1} = c_n x_n + d_n y_n \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in S^1, \quad y \in S^1, \tag{1}$$

где матрица коэффициентов

$$A(n) = \begin{bmatrix} a(n) & b(n) \\ c(n) & d(n) \end{bmatrix}$$

является ω-периодической, т.е. $A(n+\omega) = A(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и хотя бы один из ее элементов отличен от постоянной?

Теорема. *Если система (1) имеет отличное от стационарного Ω-периодическое решение такое, что период решения взаимно прост с периодом системы, то столбцы матрицы $P(n) = A(n+\Omega) - A(n)$, $n \in \mathbb{N}$, линейно зависимы.*

Следствие. *Если матрица $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, имеет полный столбцовый ранг, т.е.* $\mathrm{rank_{col}} P = 2$, *то нестационарные сильно нерегулярные периодические решения у системы (1) отсутствуют.*

Примером служит система

$$x_{n+1} = -x_n + b_n y_n, \quad y_{n+1} = d_n y_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (b_n) \in PS^1_\omega, \quad (d_n) \in PS^1_\omega, \tag{2}$$

где хотя бы один из коэффициентов (b_n), (d_n) отличен от постоянного, т.е. $\omega \geqslant 2$, и наибольший общий делитель чисел 2 и ω равен 1. Система (2) имеет 2-периодическое решение

$$x_n = (-1)^n, \quad y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Период решения является взаимно простым с периодом системы (2).

Литература

1. Agarwal R. P. *Difference equations and inequalities: theory, methods and applications.* New York: Marcel Dekker, 1992.

2. Massera J. L. *Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales* // Bol. de PersonNameProductIDla Facultadla Facultad de Ingenieria. 1950. V. 4. № 1. P. 37–45.

3. Еругин Н. П. *О периодических решениях линейной однородной системы дифференциальных уравнений* // Докл. АН БССР. 1962. Т. 6. № 7. С. 407–410.