К РАЗРЕШИМОСТИ И ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

А.Н. Бондарев

Изучается задача

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)X + X(B_1(t) + \lambda^2 B_2(t)) + F(t), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i, \lambda) = 0, \tag{2}$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, A, B_1, B_2, F – матрицы-функции класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей, M_i – заданные постоянные $(n\times n)$-матрицы; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$.

В работе, являющейся продолжением [1] и развитием [2], по методу [3, гл. 1] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), алгоритмы построения решения и дана оценка его области локализации.

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad m_i = \|M_i\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta_2 = \max_t \|B_2(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|,$$

$$\mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_t \|V^{-1}(t)\|, \quad v_i = \|V_i\|, \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t,\lambda)\|,$$

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad q(\varepsilon) = q_1\varepsilon^2 + q_2\varepsilon, \quad N = \gamma\mu_1\mu_2\omega h\sum_{i=1}^{k} m_i v_i,$$

где $q_1 = \gamma\mu_1\mu_2\beta_2\omega\sum_{i=1}^{k} m_i v_i$, $q_2 = \gamma\mu_1\mu_2\alpha\omega\sum_{i=1}^{k} m_i v_i$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц, Φ – линейный матричный оператор типа [4], $\Phi Y = \sum_{i=1}^{k} M_i Y V_i$, $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения $dV/dt = VB_1(t)$.

Теорема. *Пусть оператор Φ однозначно обратим. Тогда при*

$$|\lambda| < \frac{2}{q_2 + \sqrt{q_2^2 + 4q_1}} \tag{4}$$

задача (1), (2) однозначно разрешима; ее решение $X(t,\lambda)$ представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leqslant N/(1 - q(\varepsilon))$.

Задача (1), (2) сведена к эквивалентному интегральному уравнению

$$X(t,\lambda) = \Bigg(\Phi^{-1}\Bigg\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [\lambda A(\tau)X(\tau,\lambda) +$$

$$+ \lambda^2 X(\tau,\lambda)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)\,d\tau V_i\Bigg\}\Bigg)V(t), \tag{4}$$

для исследования разрешимости которого используется принцип сжимающих отображений (см., например, [5, с. 605]).

Решение строится по алгоритму

$$X_p(t,\lambda) = \Bigg(\Phi^{-1}\Bigg\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [\lambda A(\tau)X_{p-1}(\tau,\lambda) +$$

$$+ \lambda^2 X_{p-1}(\tau,\lambda)B_2(\tau) + F(\tau)(\tau,\lambda)]V^{-1}(\tau)\,d\tau V_i\Bigg\}\Bigg)V(t), \quad p = 1,2,\ldots, \qquad (5)$$

где в качестве начального приближения принята произвольная матрица $X_0(t,\lambda) \in \mathbb{C}$.

Установлено, что последовательность $\{X_s(t,\lambda)\}_0^\infty$, построенная по алгоритму (5), сходится равномерно по $t \in I$ к решению полученного интегрального уравнения, при этом справедливы оценки

$$\|X - X_s\|_C \leqslant \frac{q(\varepsilon)^s}{1-q(\varepsilon)}\|X_1 - X_0\|_C, \quad s = 0,1,2,\ldots; \quad \|X\|_C \leqslant \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q(\varepsilon)}.$$

Из оценки для $\|X\|_C$ при $X_0(t,\lambda) \equiv 0$ следует оценка из теоремы.

Аналогичные результаты дает применение метода малого параметра Пуанкаре–Ляпунова к интегральному уравнению (4). При этом решение строится в виде

$$X(t,\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s X_s(t), \qquad (6)$$

где

$$X_0(t) = \Bigg(\Phi^{-1}\Bigg\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} F(\tau)V^{-1}(\tau)\,d\tau V_i\Bigg\}\Bigg)V(t),$$

$$X_1(t) = \Bigg(\Phi^{-1}\Bigg\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} A(\tau)X_0(\tau)V^{-1}(\tau)\,d\tau V_i\Bigg\}\Bigg)V(t),$$

$$X_{p+1}(t) = \Bigg(\Phi^{-1}\Bigg\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A(\tau)X_p(\tau) + X_{p-1}(\tau)B_2(\tau)]V^{-1}(\tau)\,d\tau V_i\Bigg\}\Bigg)V(t), \quad p=1,2,\ldots$$

Установлено, что ряд (6) сходится равномерно по $t \in I$ в области (значений параметра λ) (4).

Литература

1. Bondarev A. N. *Multipoint Boundary Value Problem for the Linear Matrix Lyapunov Equation with Parameter* // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations «QUALITDE – 2015»: abstracts. 2015. P. 32–35.

2. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 776–784.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

4. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness* // J. Math. Anal. and Appl. 1992. V. 167. P. 505–515.

5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.