КРИТЕРИИ СИЛЬНОЙ ВЛОЖИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В.Т. Борухов, О.М. Кветко

В монографии [1] определены понятия слабой и сильной вложимости компонент решений нелинейной дифференциальной системы в множество решений линейных автономных систем. Критерии слабой вложимости представлены в [1], критерий сильной вложимости вытекает из результатов работы [2]. В данном сообщении мы приводим новый критерий сильной вложимости системы

$$\dot{x}(t) = F(x), \tag{1}$$

где $x = [x_1, \ldots, x_n]^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = [f_1(x), \ldots, f_n(x)]^{\text{т}}$, $f_\nu(x) = \sum_{|l|=1}^{r} a_l^\nu x^l$, $l = l_1 \ldots l_n$ – мультииндекс, $x^l = x_1^{l_1} \ldots x_n^{l_n}$, $|l| := l_1 + \ldots + l_n$, $a_l^\nu \in \mathbb{R}$. Здесь и далее предполагается градуированное лексикографическое упорядочение мультииндексов.

Определение. Несколько модифицируя определение сильной вложимости [1], систему (1) назовем сильно вложимой в линейную автономную конечномерную систему

$$\dot{z}(t) = D_s z(t), \quad z \in \mathbb{R}^s, \tag{2}$$

если существует линейное отображение согласования $G_s : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ и отображение вложимости $P_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ такие, что произвольная траектория $x(t, x_0)$ $(t \geqslant 0$, $x(0, x_0) = x_0)$ системы (1) имеет вид $x(t, x_0) = G_s e^{D_s t} P_s(x_0)$.

Из [3, 4] следует

Лемма. *Система (1) вложима в окрестности нуля* $(x = 0,\ t = 0)$ *в линейную дифференциальную бесконечномерную систему*

$$\dot{z}(t) = Az(t),$$

где

$$z(t) = [z_1(t), \ldots, z_m(t), \ldots]^{\text{т}}, \quad z_m(t) = [z_\alpha(t) \,|\, |\alpha| = m],$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1r} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2r} & A_{2r+1} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}, \quad A_{jm} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu a_{l-k+\delta_\nu}^\nu \right)_{|k|=j}^{|l|=m}.$$

Здесь A_{jm} – $N_j \times N_m$ – *матрица* $(N_j = n(n+1)\ldots(n+j-1)/(j!))$; $\delta_\nu = \delta_{1\nu} \ldots \delta_{n\nu}$, $\delta_{\nu\nu} = 1$, $\delta_{i\nu} = 0$, *если* $i \neq \nu$; $a_{l-k+\delta_\nu}^\nu = 0$, *если* $a_{l-k+\delta_\nu}^\nu \notin \{a_\alpha^\nu | 1 \leqslant |\alpha| \leqslant r\}$.

Теорема 1. *Пусть* $s := s_k = N_1 + \ldots + N_k$. *Тогда для вложимости системы (1) в систему (2) достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$G_{s_k} D_{s_k}^i B_{s_k} = 0 \quad \text{для любого} \quad i \in \{0, \ldots, s_k - 1\}, \tag{3}$$

где

$$D_{s_k} := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{kk} \end{bmatrix}, \quad B_{s_k} := \begin{bmatrix} A_{1k+1} & \ldots & A_{1k+r-1} \\ A_{1k+1} & \ldots & A_{2k+r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{kk+1} & \ldots & A_{kk+r-1} \end{bmatrix},$$

$G_{s_k} := [I_n \ \underbrace{0 \ldots 0}_{s_k - N_1}]$. *Здесь* I_n – $n \times n$ *единичная матрица,* $A_{ij} = 0$, *если* $j > r + i - 1$.

Обратно, если система (1) вложима в систему (2), то она также вложима в систему вида (2), для которой $D_s = D_{s_k}$, $G_s = G_{s_k}$, $P_s(x_0) = [x_0^l| \ \ |l| = m, \ \ m = 1,\dots,k]^{\mathrm{T}}$ *и выполняются условия (3).*

Обозначим систему (1) символом Σ и рассмотрим пару (Σ, w), где $w = w(x_1,\dots \dots x_n) \in \mathbb{R}[x_1,\dots x_n]$, $\mathbb{R}[x_1,\dots x_n]$ – линейное пространство вещественных полиномов от переменных $x_1,\dots x_n$. Следуя [2], пару (Σ, w) будем называть конечномерно сильно вложимой, если для любого $p \in \mathbb{R}^n$ композиция $(w \cdot \varphi_t)(p)$ функции w и отображения сдвига $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ на решениях системы Σ удовлетворяет подходящей линейной конечномерной системе дифференциальных уравнений.

Отметим, что сильная вложимость системы (1) в смысле определения эквивалентна сильной вложимости n пар $(\Sigma, x_1),\dots,(\Sigma, x_n)$. Из [2] следует

Теорема 2. *Пара* (Σ, w) *конечномерно сильно вложима тогда и только тогда, когда существует* $m \in \{1, 2, \dots\}$, *для которого выполняется условие*

$$\dim \mathcal{L}_{m-1} = \dim \mathcal{L}_m = m, \tag{4}$$

где $\mathcal{L}_{m-1} = \operatorname{span}\{w, Lw, \dots, L^{m-1}w\}$ *– линейная оболочка в пространстве* $\mathbb{R}[x_1,\dots x_n]$ *множества* $\{w, Lw, \dots, L^{m-1}w\}$, L *– линейный оператор вида*

$$L = f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Число m из равенства (4) определяет минимальную размерность пространства состояний линейной системы вложения и называется порядком вложимости пары (Σ, w).

Пусть задано непустое открытое в $\mathbb{R}^n$ множество Ω.

Теорема 3. *Пара* (Σ, w) *конечномерно сильно вложима с порядком вложимости* m *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*

1) существуют векторы $z_1,\dots,z_m \in \Omega$ *такие, что*

$$\det \begin{bmatrix} w(z_1) & (Lw)(z_1) & \dots & (L^{m-1}w)(z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w(z_m) & (Lw)(z_m) & \dots & (L^{m-1}w)(z_m) \end{bmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

2) для любых векторов $z_1,\dots z_{m+1} \in \Omega$ *выполняется условие*

$$\det \begin{bmatrix} w(z_1) & (Lw)(z_1) & \dots & (L^{m}w)(z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w(z_{m+1}) & (Lw)(z_{m+1}) & \dots & (L^{m}w)(z_{m+1}) \end{bmatrix} = 0. \tag{6}$$

Отметим, что условия (5), (6) определяют алгебраическое множество в пространстве коэффициентов системы Σ.

Литература

1. Мироненко В. И. *Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений.* Мн.: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1981.

2. Борухов В. Т. *Сильная вложимость автономных нелинейных дифференциальных систем в линейные дифференциальные системы* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 313–321.

3. Тартаковский В. *Явные формулы для локальных разложений около точек покоя* // Докл. АН СССР. 1950. Т. 72. № 5. С. 853–856.

4. Борухов В. Т., Кветко О. М. *Вложимость нелинейных дифференциальных систем в линейные системы и полиномиальные первые интегралы* // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация. Материалы междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина, Минск, 24-29 сент. 2018 г. Мн.: БГУ, 2018. С. 81–82.