РАЗЛИЧЕНИЕ ЦЕНТРА, ФОКУСА И СЕДЛО–ФОКУСА ДЛЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.А. Денисковец, В.Ю. Тыщенко

Для двумерной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вопрос различения центра и фокуса изучается достаточно длительное время (см., например, монографию [1]). Отметим также, что в многомерном случае аналогичные проблемы почти не рассматривались. Далее мы будем рассматривать вопрос о различении топологического типа изолированного состояния равновесия $O(0,0,0)$ трехмерной однородной системы Дарбу

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z + xF(x,y,z),$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z + yF(x,y,z),$$

$$\frac{dz}{dt} = a_3x + b_3y + c_3z + zF(x,y,z), \tag{1}$$

где $F(x,y,z)$ есть гладкая однородная функция степени однородности $m \geqslant 1$, имеющей один вещественный и пару чисто мнимых характеристических корни. В этом случае возникает проблема о различении центра, фокуса и седло–фокуса [2, с. 202–203].

Непосредственными вычислениями убеждаемся [3], что в этом случае с помощью линейного однородного невырожденного преобразования (не меняющего топологический тип состояния равновесия $O(0,0,0)$) систему Дарбу (1) приводим к виду

$$\frac{dx}{dt} = -\beta y + xS(x,y,z), \quad \frac{dy}{dt} = \beta x + yS(x,y,z), \quad \frac{dz}{dt} = \lambda z + zS(x,y,z), \tag{2}$$

где $\beta\lambda \neq 0$, $S(x,y,z)$ есть гладкая однородная функция степени однородности $m \geqslant 1$. Далее, не умаляя общности, будем полагать $\lambda < 0$ (ибо в противном случае этого всегда можно добиться заменой независимой переменной $t \mapsto -t$).

Теорема 1. *Если $\lambda < 0$, то состояние равновесия системы Дарбу (2) является:*

1) фокусом при $\beta \int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)\,d\tau < 0$;

2) центром при $\beta \int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)\,d\tau = 0$;

3) седло–фокусом при $\beta \int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)\,d\tau > 0$.

Теорема 2. *Для того чтобы при $\lambda \neq 0$ состояние равновесия $O(0,0,0)$ системы Дарбу (2) было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda < 0$ и $\beta \int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)\,d\tau \leqslant 0$.*

Теорема 3. *Для того чтобы при $\lambda \neq 0$ состояние равновесия $O(0,0,0)$ системы Дарбу (2) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda < 0$ и $\beta \int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)\,d\tau < 0$.*

Пусть теперь функция $F(x,y,z)$ (а значит, и функция $S(x,y,z)$) является однородным полиномом степени m.

Теорема 4. *Состояние равновесия* $O(0,0,0)$ *с парой чисто мнимых и одним ненулевым характеристическим корнями полиномиальной системы Дарбу (1) при нечетном* m *является центром, устойчивым при отрицательном вещественном характеристическом корне, и неустойчивым при положительном вещественном характеристическом корне.*

Теорема 5. *Если трехмерное вещественное автономное проективное матричное уравнение Риккати имеет состояние равновесия с парой чисто мнимых и одним ненулевым характеристическими корнями, то данное состояние равновесия является центром, устойчивым при отрицательном вещественном характеристическом корне, и неустойчивым при положительном вещественном характеристическом корне.*

Литература

1. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. *Нелинейные колебания в системах второго порядка.* Мн.: БГУ, 1982.

2. Пуанкаре А. *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.* М.; Л.: ГИТТЛ, 1947.

3. Блашкевич В. В., Денисковец А. А., Тыщенко В. Ю. *К вопросу о различении центра, фокуса и седло–фокуса для системы Дарбу* // Изв. Гомельского гос. ун-та. 2014. № 3. С. 10–14.