О ЕДИНСТВЕННОСТИ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИРРАЦИОНАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В.С. Денисов

В [1] были найдены достаточные условия существования по крайней мере одного неустойчивого предельного цикла или по крайней мере двух предельных циклов системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Dy^{(6m+4n-1)/(2n+1)} + Ay^{(4m+2n-1)/(2n+1)} + By^{(2m-1)/(2n+1)} + f(x), \quad \dot{y} = g(x), \qquad (1)$$

где постоянные $D > 0$, $A > 0$, $B > 0$, а для всех $m, n \in \mathbb{N}$ нечетные непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на всей числовой оси и удовлетворяют условиям:

I) $\exists x_1, x_3$ такие, что $f(x) < 0$ на $(0; x_1)$, $f(x) > 0$ на $(x_1; x_3)$; $g(x) < 0$ на $(0; \infty)$; $f(0) = f(x_1) = g(0) = 0$;

II) $G(x) = \int_0^x -g(s)\,ds \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

Если $D = 0$, $m = 2$, $n = 1$, то имеем систему с кубической нелинейностью по переменной y, для которой в работе [2] были найдены достаточные условия единственности устойчивого предельного цикла, охватывающего неустойчивый предельный цикл. В настоящем докладе представлен аналогичный результат, полученный для системы (1).

Уравнение

$$Dy^{(6m+4n-1)/(2n+1)} + Ay^{(4m+2n-1)/(2n+1)} + By^{(2m-1)/(2n+1)} - \gamma M = 0,$$

где $M = \max\limits_{[0,x_3]} |f(x)|$, имеет единственный действительный корень, который обозначим через d. Обозначим также

$$P(y) = \frac{D(2n+1)}{6m+6n} y^{(6m+6n)/(2n+1)} + \frac{A(2n+1)}{4m+4n} y^{(4m+4n)/(2n+1)} + \frac{B(2n+1)}{2m+2n} y^{(2m+2n)/(2n+1)},$$

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x -g(s) f(s)\,ds, \quad V(x,y) = P(y) + G(x).$$

Теорема. *Если выполнены условия I) и II), а также следующие условия:*
III) $\exists \gamma > 1$, $\exists x_2 \in (x_1, x_3)$ такие, что верны неравенства

$$\varphi(x_2) \geqslant \frac{2\varphi(x_1)}{1-\gamma} \quad \text{и} \quad G(x_3) - G(x_2) \geqslant P(d) + 2Md, \qquad (2)$$

IV) $\varliminf\limits_{x \to +\infty} (-f(x)) > 0$, $f'(x) < 0$ при $x \geqslant x_3$,

то система (1) имеет по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, лежащий в полосе $-x_3 \leqslant x \leqslant x_3$, и единственный устойчивый предельный цикл, охватывающий неустойчивый.

Действительно, при $\gamma > 1$ первое из неравенств (2) влечет за собой выполнение соответствующего неравенства из условий теоремы 3 работы [1], что при наличии остальных сформулированных выше условий обеспечивает существование по крайней мере двух предельных циклов. Доказательство единственности устойчивого предельного цикла проводится методом сближения интегральных кривых аналогично доказательству единственности устойчивого предельного цикла системы с кубической нелинейностью по переменной y, изложенному в статье [2].

Литература

1. Денисов В. С. *Существование предельных циклов некоторой динамической системы с иррациональной нечетной нелинейностью по одной переменной* // XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2018»: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 16–18 мая 2018 г. Ч. 1. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 2018. С. 72.

2. Денисов В. С. *О единственности устойчивого предельного цикла динамических систем с нелинейностями третьей и пятой степени* // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тр. Третьей Междунар. науч. конф., 17–22 сент. 2012 г., Брест / НАН Беларуси [и др.]. Мн.: Изд. центр БГУ, 2012. С. 108–117.