ВЫДЕЛЕНИЕ КЛАССА ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ БРЮССЕЛЯТОРА С ЕДИНСТВЕННЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ ЦИКЛОМ

А.В. Кузьмич, А.А. Гринь

Рассмотрим вещественную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = y \equiv P,$$

$$\frac{dy}{dt} = y - y^2 - y^3 - (1-y)^2 x + h(x)y + g(x) \equiv Q, \quad X = (P, Q), \tag{1}$$

с непрерывными на $\mathbb{R}$ функциями $h(x)$ и $g(x)$. При $h(x) \equiv 0$ и $g(x) \equiv 0$ система (1) представляет собой классическую систему брюсселятора, для которой доказано, что она имеет единственный предельный цикл [1].

Цель нашей работы заключается в выделении класса систем вида (1) с единственным предельным циклом.

Основным инструментом исследований является признак Дюлака–Черкаса [2], который основан на нахождении непрерывно дифференцируемой функции Дюлака–Черкаса $\Psi(x, y)$ в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ и действительного числа $k \neq 0$ таких, что выполняется условие

$$\Phi = k\Psi \operatorname{div} X + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0 \ \ (< 0) \quad \forall (x, y) \in \Omega. \tag{2}$$

Тогда оценка числа предельных циклов системы (1) в области Ω с одной точкой покоя проводится в соответствии со следующей теоремой [3].

Теорема 1. *Пусть структурно устойчивая система (1) в односвязной области Ω имеет единственную точку покоя – антиседло O, и функцию Ψ, удовлетворяющую условию (2). Тогда если кривая $W = \{(x, y) \in \Omega : \Psi(x, y) = 0\}$ состоит из s вложенных друг в друга овалов ω_i, окружающих точку O, то при $k < 0$ в каждой из $s - 1$ двусвязных подобластей Ω_i, ограниченных соседними овалами ω_i и ω_{i+1} кривой W, система (1) имеет точно один предельный цикл, а в целом она может иметь в области Ω не более s предельных циклов.*

Для нахождения точного числа предельных циклов применима следующая теорема из работы [4].

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и дополнительно для системы (1) существует функция вида*

$$B = |\Psi(x, y)|^{1/k} |\tilde{\Psi}(x, y)|^{1/\tilde{k}}, \quad k, \tilde{k} \in \mathbb{R}, \quad k\tilde{k} \neq 0, \quad \Psi, \tilde{\Psi} \in C^1(\Omega), \tag{3}$$

такая, что при $\tilde{k} < 0$ кривая $\tilde{W} = \{(x, y) \in \Omega : \tilde{\Psi}(x, y) = 0\}$ задает замкнутую трансверсальную кривую, окружающую внешний овал кривой W. Причем кривая $\tilde{W}$ не пересекается ни с кривой W, ни с кривой $V = \{(x, y) \in \Omega : \tilde{\Phi}(x, y) = 0\}$, где

$$\tilde{\Phi}(x, y) = k\tilde{k}\Psi\tilde{\Psi} \operatorname{div} X + k\Psi \frac{d\tilde{\Psi}}{dt} + \tilde{k}\tilde{\Psi} \frac{d\Psi}{dt}.$$

Тогда система (1) имеет точно s предельных циклов в области Ω.

При построении функции Дюлака–Черкаса для систем, линейно зависящих от параметра, справедлива следующая теорема [3].

Теорема 3. *Пусть для параметрического семейства систем*

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y,a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y,a), \tag{4}$$

линейно зависящего от параметра $a \in I \subset \mathbb{R}$, *область* Ω *представляет выпуклый компакт и выполняются условия:*

1) множество I *является отрезком в пространстве* $\mathbb{R}$ *и не содержит бифуркационных значений параметра* a;

2) существуют функции $C_j(a)$, $j = 1,\ldots,n$, *а также* $\Psi = \sum_{j=1}^{n} C_j(a)\Psi_j(x,y)$ *такие, что функция* $\Phi(x,y,a) = \sum_{j=1}^{n} C_j(a)\Phi_j(x,y,a)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Phi(x,y,a_i) > 0 \quad и \quad (x,y) \in \Omega$$

на концах отрезка I. *Тогда* $\Psi(x,y,a)$ *является функцией Дюлака семейства систем (4) в области* Ω *при всех значениях* $a \in I$.

С помощью построения функции Дюлака–Черкаса в виде

$$\Psi(x,y) = ax^2 + ay^2 - c, \quad a,c > 0. \tag{5}$$

при $k = -1$ для системы (1) получен следующий результат.

Теорема 4. *Функция (5) представляет собой функцию Дюлака–Черкаса при всех действительных значениях* x, y *и* $c > 0$, $a \in [1,9]$ *для системы*

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = y - y^2 - y^3 - (1-y)^2 x + (-1 - 2x - ax^2 + c)y - \frac{(1+x)(ax^2 - c)}{a}, \tag{6}$$

которая соответственно имеет не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости. Если предельный цикл существует, то он является устойчивым.

Доказательство существования предельного цикла проводилось с помощью теоремы 2 и теоремы 3. Дополнительную замкнутую трансверсальную кривую искали в виде многочлена степени $l = 6$ с помощью построения функции вида (4) и решения соответствующей задачи линейного программирования

$$L \to \max, \quad \sum_{j=1}^{m} C_j \tilde{\Phi}_j(x_p, y_p, a_1) - L \geqslant 0,$$

$$\sum_{j=1}^{m} C_j \tilde{\Phi}_j(x_p, y_p, a_2) - L \geqslant 0, \quad |C_j| \leqslant 1, \tag{7}$$

где $m = (l+1)(l+2)/2$, на сетке узлов (x_p, y_p), $p = 1,\ldots,N_0$, взятой в области Ω, $N_0 = n_x n_y$, где n_x, n_y – число узлов сетки вдоль осей Ox и Oy.

Для системы (6) при $a = 3$, $k = -1$, $\tilde{k} = -0.4$ и с шагом $h = 0.5$ для параметра $c \in [1,15]$ в области $\Omega = \{(x,y) : x \in [-3.2, 3.2],\ y \in [-3,3]\}$ с количеством узлов сетки $n_x = n_y = 35$ найдены решения задач линейного программирования (7). При этом кривая $\tilde{W}$ задает дополнительную трансверсальную кривую в области Ω, окружающую единственную точку покоя системы (6) и окружность W. Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 5. *Система (6) при* $a = 3$ *и* $c \in [1,15]$ *имеет единственный предельный цикл во всей фазовой плоскости, окружающий единственную точку покоя.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф17М-148).

Литература

1. Лаврова А. И., Постников Е. Б., Романовский Ю. М. *Брюсселятор – абстрактная химическая реакция?* // Успехи физических наук. 2009. Т. 179. № 12. С. 1327–1332.

2. Черкас Л. А. *Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 689–699.

3. Черкас Л. А., Гринь А. А., Булгаков В. И. *Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных ситем второго порядка (численно–алгебраический подход).* Гродно: ГрГУ, 2013.

4. Гринь А. А., Кузьмич А. В. *Признак Дюлака–Черкаса для точной оценки числа предельных циклов автономных систем на плоскости* // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 174–182.