К КОНСТРУКТИВНОМУ АНАЛИЗУ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА–РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

О.А. Маковецкая

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + \lambda F(t,X), \quad X(t,\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \tag{2}$$

где $t \in I$, $A, B, Q \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I,\ \|X\| < \tilde\rho\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально): $F(t,0) \not\equiv 0$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

При $Q = 0$, $\lambda = 1$ эта задача качественными методами исследовалась в [1], конструктивными методами, описанными в монографии [2], – в работе [3] и др., с периодическими краевыми условиями – в работе [4] и др.

Примем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X) : 0 \leqslant t \leqslant \omega,\ \ \|X\| \leqslant \rho\}, \quad M = \int\limits_0^\omega A(\tau)\,d\tau, \quad N = -\int\limits_0^\omega B(\tau)\,d\tau,$$

$$\gamma = \|\Phi^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad \delta = \max_t \|Q(t)\|,$$

$$h = \max_t \|F(t,0)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad q(\rho,\varepsilon) = q_1(\rho) + q_2(\rho)\varepsilon, \quad \varphi(\rho,\varepsilon) = \varphi_1(\rho) + \varphi_2(\rho)\varepsilon,$$

$$q_1(\rho) = \gamma\delta\omega[(\alpha+\beta)\omega + 2]\rho + \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2, \quad q_2(\rho) = \gamma\omega L[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega],$$

$$\varphi_1(\rho) = \gamma\delta\omega[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega]\rho^2 + \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2\rho, \quad \varphi_2(\rho) = [1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega](L+h)\gamma\omega,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho - \varphi_1(\rho)}{\varphi_2(\rho)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1 - q_1(\rho)}{q_2(\rho)}, \quad \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

где $0 < \rho < \tilde\rho$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, Φ – линейный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [5, с.21].

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия: матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_1(\rho) < \rho$, $q_2(\rho) < 1$. Тогда при $|\lambda| \leqslant \varepsilon_0$ решение задачи (1), (2) в области D_ρ существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \leqslant \varphi(\rho,\varepsilon)$.*

Для построения решения задачи (1), (2) предложен алгоритм с неявной вычислительной схемой

$$X_k(t,\lambda) = \Phi^{-1}\Bigg\{\int\limits_0^\omega A(\tau)\,d\tau\Bigg(\int\limits_\tau^t [A(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) + X_{k-1}(\sigma,\lambda)B(\sigma) +$$

$$+ X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) + \lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]\, d\sigma \quad d\tau + \int_0^{\tau} [A(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) +$$

$$+ X_{k-1}(\sigma,\lambda)B(\sigma) + X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) + \lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]\, d\sigma \Bigg) B(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_0^{\omega} [X_k(\tau,\lambda)Q(\tau)X_k(\tau,\lambda) + \lambda F(\tau, X_k(\tau,\lambda))]\, d\tau \Bigg\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где начальное приближение X_0 отыскивается в виде постоянной $C = C(\lambda)$ из матричного уравнения

$$C = -\Phi^{-1} \int_0^{\omega} [CQ(\tau)C + \lambda F(\tau, C)]\, d\tau,$$

которое на основании условий теоремы имеет единственное решения, подчиненное неравенству $\|C\| \leqslant \rho$,

Литература

1. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. // J. of Math. Anal. and Appl. 1992. V. 167. P. 505–515.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

3. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.

4. Лаптинский В. Н. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.

5. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/