ЛЕВОСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

И.И. Маковецкий

Исследуется задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F_0(t,X) + \lambda F_1(t,X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где $A, B \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F_i \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0,\omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I, \ \|X\| < \tilde\rho\}$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$, M, N – постоянные $n\times n$-матрицы; функции $F_i(t,X)$ удовлетворяют в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально); $F_0(t,0) \not\equiv 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Эта задача качественными методами исследовалась в [1]. Данная работа является продолжением и развитием [2; 3, гл. 1]. С помощью конструктивного метода [4, гл. 1] получены в терминах задачи (т.е. по ее исходным данным) достаточные условия однозначной разрешимости, алгоритм построения решения, а также оценка его области локализации.

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X) : t \in I, \ \|X\| \leqslant \rho\}, \quad \lambda_1 = \max_t \|U(t)\|, \quad \lambda_2 = \max_t \|U^{-1}(t)\|, \quad \Phi = P + E,$$

$$P = U^{-1}(\omega)N^{-1}M, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad m = \max\{\|P\|, 1\}, \quad h_i = \max_t \|F_i(t,0)\|,$$

$$a_0 = \gamma\lambda_0 m\omega(\beta + L_0), \quad a_1 = \gamma\lambda_0 m\omega L_1, \quad b_0 = \gamma\lambda_0 m\omega h_0, \quad b_1 = \gamma\lambda_0 m\omega h_1,$$

$$q = a_0 + \varepsilon a_1, \quad p = b_0 + \varepsilon b_1, \quad F(t,X,\lambda) = F_0(t,X) + \lambda F_1(t,X),$$

$$L = L_0 + \varepsilon L_1, \quad h = h_0 + \varepsilon h_1, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \varepsilon_0 = \frac{\rho\,(1-a_0) - b_0}{\rho a_1 + b_1},$$

где $t \in I$, $0 < \rho < \tilde\rho$, $\lambda_0 = \lambda_1\lambda_2$, $L_i = L_i(\rho) > 0$ – постоянные Липшица для $F_i(t,X)$ в D_ρ.

Лемма. *Пусть выполнены следующие условия: 1)* $\det N \neq 0$; *2)* $\det\Phi \neq 0$; *3)* $q < 1$; *4)* $p/(1-q) \leqslant \rho$. *Тогда в области* D_ρ *решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка*

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leqslant p/(1-q).$$

Теорема. *Пусть выполнены условия 1) и 2) леммы, а также неравенства* $a_0 < 1$, $b_0/(1-a_0) < \rho$. *Тогда при* $|\lambda| \leqslant \varepsilon_0$ *решение задачи (1), (2) в области* D_ρ *существует и единственно. Решение* $X(t,\lambda)$ *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедливы оценки*

$$\|X(t,\lambda)\| \leqslant \frac{p}{1-q}, \quad \|X(t,\lambda) - X(t,0)\| \leqslant \frac{\varepsilon(a_1\|X_0\|_{\mathbb{C}} + b_1)}{1-q}.$$

Указанное рекуррентное соотношение имеет вид

$$X_{k+1}(t,\lambda) = U(t)\Phi^{-1}\Bigg[P\int\limits_0^t U^{-1}(\tau)(X_k(\tau,\lambda)B(\tau) + F(\tau, X_k(\tau,\lambda),\lambda))\,d\tau -$$

$$-\int\limits_t^\omega U^{-1}(\tau)(X_k(\tau,\lambda)B(\tau) + F(\tau, X_k(\tau,\lambda),\lambda))\,d\tau\Bigg], \quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad (3)$$

где $X_0(t,\lambda)$ *– произвольная матрица класса* $\mathbb{C}$, *принадлежащая шару* $\|X\|_{\mathbb{C}} \leqslant \rho$.

Сходимость алгоритма (4) характеризуется оценкой

$$\|X_k - X\|_{\mathbb{C}} \leqslant q^k \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

которая при $X_0 \equiv 0$ *имеет вид*

$$\|X_k - X\|_{\mathbb{C}} \leqslant q^k \frac{p}{(1-q)}.$$

Литература

1. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. // J. of Math. Anal. and Appl. 1992. V. 167. P. 505–515.

2. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 7. С. 994–996.

3. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.

4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.