О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ КОНЕЧНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

О.Н. Малышева

В настоящее время общепринятой является гипотеза, что набор распределений предельных циклов: a) 1, $(1,0)$; в) 2, $(2,0)$; c) 3, $(3,0)$; d) $(1,1)$; e) $(2,1)$; f) $(3,1)$ – является полным для квадратичной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \tag{1}$$

в которой P, Q – многочлены, $\max\{\deg P, \deg Q\} = 2$. При этом предельные циклы окружают лишь одну особую точку – фокус, а всего система (1) имеет не более двух фокусов.

Признак Дюлака–Черкаса [1] существования заданного числа предельных циклов системы Льенара является адаптивным и позволяет для систем с двумя параметрами найти области на плоскости параметров с достаточно плотным множеством точек с одинаковым числом предельных циклов.

Система (1) вида $F + A + S_\infty$ (A означает, что система имеет антиседло, т.е. фокус или узел) в общем случае аффинным преобразованием фазовых переменных и растяжением шкалы времени сводится к следующей системе, в которой фокус помещен в точку $(1,-1)$, а антиседло – в точку $(x_0, -1/x_0)$:

$$\frac{dx}{dt} = 1 + xy, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^j, \quad a_{02} = a, \tag{2}$$

при этом выполнены условия: 1) $0 < a < 1$, $a_{20} < 0$, $x_0 < 0$; 2) $a_{00} = a_{01} - a_{20} - a_{10} - a$; 3) $a_{10} = -a_{20}(x_0+1) - a_{01}/x_0 + a(x_0+1)x_0^2$; 4) $L = 2a - a_{10} - a_{01} - 2a_{20} > 0$; 5) $(a_{11} + a_{01} - 2a - 1)^2 - 4L < 0$; 6) $(-a_{01}x_0 + a(x_0+1))^2 - 4a_{20}ax_0^3 < 0$; 7) $a_{11}^2 - 4a_{20}(a-1) < 0$.

Условия 1), 7) гарантируют существование единственной особой точки системы в бесконечности – седла в направлении оси y. Условия 1)–5) означают, что система (2) имеет две конечные особые точки: фокус $(1,-1)$ и антиседло $(x_0, -1/x_0)$.

Замена $x = 1/\xi$, $Y = Y(\xi\omega) - \xi$ систему (2) приводит к системе

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi Y, \quad \frac{dY}{dt} = \omega^2 P_4(\xi) - \omega P_2(\xi) Y - (a-1)Y^2, \tag{3}$$

где $P_4(\xi) = a_{20} + a_{10}\xi + (a_{01} - a_{20} - a_{10} - a)\xi^2 - a_{01}\xi^3 + a\xi^4$, $P_2(\xi) = a_{11} + a_{01}\xi - (2a+1)\xi^2$, с фокусами $(1,0)$, $(1/x_0, 0)$.

Наконец, после замены $Y = \xi^{1-a}y$, $\xi = x > 0$ система (4) в области $\xi > 0$ переходит в систему Льенара в первой форме

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y, \quad x > 0, \quad g(x) = \omega^2 P_4(x) x^{2a-3}, \quad f(x) = \omega P_2(x) x^{a-2}, \tag{4}$$

с фокусом $(1, 0)$.

Чтобы исследовать систему (3) в области $\xi < 0$, $Y \in \mathbb{R}$, заменой $\xi = x/x_0$ переводим антиседло системы (3) в точку $(1, 0)$. Вид системы и коэффициента не изменяются, а коэффициенты a_{20}, a_{10}, a_{11}, a_{01} перейдут соответственно в $a_{20}x_0^4$, $a_{10}x_0^3$, $a_{11}x_0^2$, $a_{01}x_0$.

Система (4) после замены $y \to y - F(x)$, $F(x) = \int_1^x f(\nu)\, d\nu$ становится системой Льенара во второй форме

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \tag{5}$$

с фокусом $(1, 0)$.

Система Льенара (5) заменой $u = \sqrt{2G(x)}\,\mathrm{sign}\,(x-1)$, $x > 0$, $G(x) = \int_1^x g(\nu)\, d\nu$, сводится к системе

$$\frac{du}{dt} = y - \tilde{F}(u), \quad \frac{dy}{dt} = -u, \tag{6}$$

$\tilde{F}(u) = F(x(u))$, где $x(u)$ – функция, обратная функции $u(x)$, $u \in I = (u_1, u_2)$,

$$u_1 = \lim_{x \to +0} u(x), \quad u_2 = \lim_{x \to +\infty} u(x).$$

Нечетная часть функции $\tilde{F}(u)$, т.е. функция $\varphi(u) = \tilde{F}(u) - \tilde{F}(-u)$, $|u| < u_0$, $u_0 = \inf_{u \in I} M$, определяет поведение траекторий системы (6) в следующем смысле: 1) если $\varphi(u) \equiv 0$, то $(1, 0)$ – центр, 2) если $\varphi(u) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$, $\varphi(u) \equiv 0$), то вокруг фокуса $(1, 0)$ предельных циклов нет, 3) если $\varphi(u)$ имеет нули в промежутке $(1, +\infty)$, то во многих случаях число предельных циклов системы (6) вокруг фокуса $(1, 0)$ не превышает числа простых нулей функции $\varphi(u)$ в промежутке $(1, +\infty)$. В свою очередь, нули $\varphi(u)$, с учетом их кратности, определяются решениями системы

$$G(x) = G(y), \quad F(x) = F(y) \quad 0 < x < 1, \quad y > 1. \tag{7}$$

В переменных $z = x/y$, y при $0 < z < 1$, $y > 1$ система (6) примет вид

$$AG = \sum_{k=0}^{4} A_k y^k = 0, \quad AF = \sum_{k=2}^{4} B_k y^k = 0,$$

где $A_0 = a_{20}(v^2 z^{-2} - 1)/(2a - 2)$, $A_1 = a_{20}(vz^{-1} - 1)/(2a - 1)$, $A_2 = (a_{01} - a_{20} - a_{10} - a) \times (v^2 - 1)/2a$, $A_3 = -a_{01}(v^2 z - 1)/(2a+1)$, $A_4 = a(v^2 z^2 - 1)/(2a+2)$, $B_2 = a_{11}(vz^{-1} - 1) \times (a - 1)$, $B_3 = a_{01}(v - 1)/a$, $B_4 = -(2a + 1)(vz - 1)/(a + 1)$, $v = z^a$.

Систему (7) будем называть системой прогноза Смейла. Для нахождения кратных решений системы (7) к ней необходимо добавить уравнение $f(zy)g(y) = g(zy)f(y)$.

Зафиксировав все параметры системы (2), кроме a_{01}, a_{11}, мы введем в рассмотрение двухпараметрические квадратичные системы с двумя конечными особыми точками. Для системы $F + A + S_\infty$ набор коэффициентов $(a_{01}, a_{11}) \in \Omega$, $\Omega : \check{a}_{01} < a_{01} < \hat{a}_{01}$, где $\check{a}_{01}$, $\hat{a}_{01}$ – соответственно наименьший и наибольший корни уравнения

$$(-a_{01}x_0 + a(x_0 + 1))^2 - 4a_{20}ax_0^3 = 0, \quad |a_{11}| < \hat{a}_{11}, \quad \hat{a}_{11} = 2\sqrt{a_{20}(a-1)}.$$

Кривые кратных решений системы (7) для обеих особых точек для системы $F + A + S_\infty$ и прямые $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = a_{11} + a_{01} - 2a - 1$, $\alpha_2 = a_{11}x_0 + a_{01} - (2a+1)/x_0$, разбивают Ω на области с одинаковым числом решений системы (7) для фокуса $(1,-1)$ системы (3) и соответствующей преобразованной системы для антиседла $(x_0, -1/x_0)$.

Теорема 1. *Система (4) вида* $2F + S_\infty$ *при* $a = 10/13$, $x_0 = -4$, $a_{20} = -40$, *не имеет распределений* $(2m, 2n)$, $m > 0$, $n > 0$ *предельных циклов.*

Теорема 2. *Если система (4) вида* $2F + S_\infty$ *при* $a = 10/13$, $x_0 = -4$, $a_{20} = -40$ *при дополнительном условии* $0 < a_{11} \leqslant 0.01$ *имеет распределение* (n_1, n_2) *предельных циклов* $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, *то одно из чисел* n_1, n_2 *равно единице.*

Для доказательства теорем в плоскости рассматриваемых параметров построены области с одинаковыми распределениями решений системы прогноза Смейла, подтвержденные применением метода обобщенных функций Дюлака–Черкаса.

Литература

1. Черкас Л. А., Гринь А. А. Булгаков В. И. *Коструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход)*. Гродно: ГрГУ, 2013.