ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА–ФОКУСА

В.И. Мироненко

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{d\varphi} = a_1(\varphi)r + a_2(\varphi)r^2 + a_3(\varphi)r^3 + \ldots =: R(\varphi, r) \tag{1}$$

с голоморфной правой частью в окрестности точки $r = 0$ и 2π-периодическими коэффициентами $a_k(\varphi)$.

Отражающая функция этого уравнения

$$F(\varphi, r) = m_1(\varphi)r + m_2(\varphi)r^2 + m_3(\varphi)r^3 + \ldots \tag{2}$$

является голоморфной и может быть найдена из основного соотношения для отражающей функции [1, с. 63]

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial r}R(\varphi, r) + R(-\varphi, F) = 0, \quad F(0, r) = r. \tag{3}$$

Подставляя ряд (2) в соотношение (4), приходим к бесконечной последовательно интегрируемой системе уравнений

$$m_1' + m_1 a_1(\varphi) + a_1(-\varphi)m_1 = 0, \quad m_2' + m_2(2a_1(\varphi) + a_1(-\varphi)) + m_1 a_1(\varphi) + a_2(-\varphi)m_1^2 = 0,$$

$$m_3' + m_3(3a_1(\varphi) + a_1(-\varphi) + m_1 a_3(\varphi) + 2m_2 a_2(\varphi) + a_2(-\varphi)(2m_1 m_2 + m_1^3) = 0, \quad \ldots,$$

$$m_1(0) = 1, \quad m_i(0) = 0 \quad \text{при} \quad i > 1.$$

Теорема. *Уравнение (1) имеет центр в точке $r = 0$ тогда и только тогда, когда функции*

$$m_1(\varphi) = \exp\left(\int\limits_0^{\varphi} (a_1(\tau) + a_1(-\tau))\, d\tau\right), \quad m_i(\varphi), \quad i > 1,$$

удовлетворяют условиям $m_1(\pi) = 1$, $m_i(\pi) = 0$ при $i > 1$.

Эта теорема является аналогом теоремы Ляпунова [2, с. 7].

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ, 2004.

2. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. *Нелинейные колебания в системах второго порядка.* Мн.: БГУ, 1982.