К АНАЛИЗУ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

Д.В. Роголев

Исследуется задача типа [1]:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B}_1(t) + \mathbf{X}\left(\mathbf{S}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{S}_2(t)\mathbf{Y}\right) + \mathbf{F}_1(t) + \lambda\mathbf{F}_2(t), \tag{1}$$

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{B}_2(t) + \mathbf{Y}\left(\mathbf{P}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{P}_2(t)\mathbf{Y}\right) + \mathbf{G}_1(t) + \lambda\mathbf{G}_2(t), \tag{2}$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda) = \mathbf{X}(\omega,\lambda), \quad \mathbf{Y}(0,\lambda) = \mathbf{Y}(\omega,\lambda), \tag{4}$$

где $t\in[0,\omega]$, $\mathbf{X},\mathbf{Y}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, матрицы $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$, $\mathbf{S}_i(t)$, $\mathbf{P}_i(t)$, $\mathbf{F}_i(t)$, $\mathbf{G}_i(t)$ $(i=1,2)$ определены и непрерывны на промежутке $[0,\omega]$, $\omega > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Матричные дифференциальные уравнения представляют собой важный класс многомерных систем специального вида, включая уравнения Ляпунова, Риккати, имеющие большое значение для теории и приложений дифференциальных уравнений (см., например, [2] и др.).

В работе, являющейся продолжением [1], с помощью метода [3, гл. 3] получены коэффициентные (т.е. в терминах задачи (1)–(3)) достаточные условия ее однозначной разрешимости, а также итерационный алгоритм построения решения.

Примем следующие обозначения:

$$D = \{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}) : 0 \leqslant t \leqslant \omega, \quad \|\mathbf{X}\| \leqslant \rho_1, \quad \|\mathbf{Y}\| \leqslant \rho_2\}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_i(\omega) = \int\limits_0^\omega \mathbf{B}_i(\tau)\,d\tau,$$

$$\tilde{\gamma}_i = \left\|\tilde{\mathbf{B}}_i^{-1}(\omega)\right\|, \quad \alpha_i = \max_t \|\mathbf{A}_i(t)\|, \quad \beta_i = \max_t \|\mathbf{B}_i(t)\|, \quad \delta_i = \max_t \|\mathbf{S}_i(t)\|,$$

$$\mu_i = \max_t \|\mathbf{P}_i(t)\|, \quad h_i = \max_t \|\mathbf{F}_i(t)\|, \quad g_i = \max_t \|\mathbf{G}_i(t)\|, \quad \|\mathbf{T}\|_C = \max_t \|\mathbf{T}(t)\|,$$

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

$$p_{11} = \tilde{\gamma}_1\beta_1(\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega^2/2 + (\alpha_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega],$$

$$p_{12} = \tilde{\gamma}_1\delta_2\rho_1\omega\left(\beta_1\omega/2 + 1\right), \quad p_{21} = \tilde{\gamma}_2\mu_1\rho_2\omega\left(\beta_2\omega/2 + 1\right),$$

$$p_{22} = \tilde{\gamma}_2[\beta_2(\alpha_2 + \beta_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2)\omega^2/2 + (\alpha_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2)\omega],$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho_1 - \tilde{\gamma}_1\{\beta_1[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 + h_1]\omega^2/2 + [\alpha_1\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 + h_1]\omega\}}{\tilde{\gamma}_1(\beta_1\omega/2+1)h_2\omega},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\rho_2 - \tilde{\gamma}_2\{\beta_2[(\alpha_2+\beta_2)\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 + g_1]\omega^2/2 + [\alpha_2\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 + g_1]\omega\}}{\tilde{\gamma}_2(\beta_2\omega/2+1)g_2\omega},$$

где $t \in [0,\omega]$, $0 < \rho_1, \rho_2 < \infty$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det\tilde{\mathbf{B}}_i(\omega) \neq 0$ $(i=1,2)$,

2) $\tilde{\gamma}_1\{\beta_1[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 + h_1]\omega^2/2 + [\alpha_1\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 + h_1]\omega\} < \rho_1$,
$\tilde{\gamma}_2\{\beta_2[(\alpha_2+\beta_2)\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 + g_1]\omega^2/2 + [\alpha_2\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 + g_1]\omega\} < \rho_2$,

3) $p_{11} < 1$, $\det(\mathbf{E} - \mathbf{P}) > 0$, *где* $\mathbf{E} = \mathrm{diag}\,(1,1)$, $\mathbf{P} = (p_{ij})$.

Тогда при $|\lambda| < \varepsilon_0$ задача (1)–(3) однозначно разрешима в области D. Решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентными интегральными соотношениями типа [1] и удовлетворяющих условиям (4).

Указанные соотношения имеют следующий вид (в выражениях $\mathbf{X}_i(t,\lambda)$, $\mathbf{Y}_i(t,\lambda)$, $k = 1, 2, \dots,$ параметр λ опущен для упрощения записей):

$$\mathbf{X}_{k+1}(t) = \Bigg\{ \int\limits_0^t [\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{X}_k(\tau)\mathbf{B}_1(\tau) + \mathbf{X}_{k-1}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)) +$$

$$+ \mathbf{F}_1(\tau) + \lambda\mathbf{F}_2 t(\tau)]\left(\int\limits_0^\tau \mathbf{B}_1(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau - \int\limits_t^\omega [\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{X}_k(\tau)\mathbf{B}_1(\tau) +$$

$$+ \mathbf{X}_{k-1}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau) + \lambda\mathbf{F}_2(\tau)]\left(\int\limits_\tau^\omega \mathbf{B}_1(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau -$$

$$- \int\limits_0^\omega [\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}_k(\tau) + \mathbf{X}_k(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_k(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_k(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau) + \lambda\mathbf{F}_2(\tau)]\,d\tau \Bigg\} \tilde{\mathbf{B}}_1^{-1}(\omega),$$

$$\mathbf{Y}_{k+1}(t) = \Bigg\{ \int\limits_0^t [\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau) + \mathbf{Y}_k(\tau)\mathbf{B}_2(\tau) + \mathbf{Y}_{k-1}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)) +$$

$$+ \mathbf{G}_1(\tau) + \lambda\mathbf{G}_2(\tau)]\left(\int\limits_0^\tau \mathbf{B}_2(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau - \int\limits_t^\omega [\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau) + \mathbf{Y}_k(\tau)\mathbf{B}_2(\tau) +$$

$$+ \mathbf{Y}_{k-1}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)) + \mathbf{G}_1(\tau) + \lambda\mathbf{G}_2(\tau)]\left(\int\limits_\tau^\omega \mathbf{B}_2(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau -$$

$$- \int\limits_0^\omega [\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}_k(\tau) + \mathbf{Y}_k(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_k(\tau) + \mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_k(\tau)) + \mathbf{G}_1(\tau) + \lambda\mathbf{G}_2(\tau)]\,d\tau \Bigg\} \tilde{\mathbf{B}}_2^{-1}(\omega).$$

В качестве начального приближения $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}_0$ принимаются нулевые матрицы, приближение $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{Y}_1$ ищется в виде матриц, зависящих только от λ и дающих приближенное решение $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{Y}_2$, удовлетворяющее условиям периодичности (4). Первое приближение имеет вид

$$\mathbf{X}_1 = -\int\limits_0^\omega (\mathbf{F}_1(\tau) + \lambda\mathbf{F}_2(\tau))\,d\tau\,\tilde{\mathbf{B}}_1^{-1}(\omega), \quad \mathbf{Y}_1 = -\int\limits_0^\omega (\mathbf{G}_1(\tau) + \lambda\mathbf{G}_2(\tau))\,d\tau\,\tilde{\mathbf{B}}_2^{-1}(\omega).$$

По методике, используемой в [1], исследованы сходимость и скорость сходимости предложенного алгоритма.

Литература

1. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1412–1420.

2. Зубов В. И. *Лекции по теории управления.* М.: Наука, 1975.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.