РАЦИОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА С ЦЕНТРОМ

А.Е. Руденок

Рассмотрим вещественную систему Льенара

$$dx/dt = -y, \quad dy/dt = f(x) + yg(x), \tag{1}$$

где f, g – линейно независимые рациональные функции, $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Говоря о центре системы (1), будем иметь в виду центр в особой точке $O(0,0)$.

Специфика рациональных систем Льенара состоит в том, что для построения их центров удобно использовать теорему Люрота [1].

Рассмотрим первые две функции Отрокова [2]

$$B_1(x) = \frac{g(x)}{f(x)}, \quad B_2(x) = \frac{B_1'(x)}{f(x)}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы система (1) имела центр, необходимо и достаточно, чтобы или выполнялось тождество*

$$f(x)g'(x) - g(x)f'(x) = k(f(x))^3, \quad k \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

или система уравнений

$$B_1(x) = B_1(y), B_2(x) = B_2(y) \tag{3}$$

имела решение

$$y = y(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1. \tag{4}$$

Теорема 1 в немного измененном виде доказана в [3].

Используя теорему 1 и теорему Люрота, доказывается

Теорема 2. *Для того чтобы система (1) имела центр, необходимо и достаточно, чтобы или выполнялось тождество (2), или функции $f(x), g(x)$ имели вид*

$$f(x) = r_1(B(x))B'(x), \quad g(x) = r_2(B(x))B'(x), \tag{5}$$

где $r_i(x)$, $B(x)$ – рациональные действительные функции, $B(0) = B'(0) = 0$, $B''(0) \neq$ $\neq 0$, $s_i(0) \neq 0$, $s_i(x)$ – знаменатели дробей $r_i(x)$, $i = 1, 2$.

Замечание. Если функции

$$F(x) = \int\limits_0^x f(u)\,du, \quad G(x) = \int\limits_0^x g(u)\,du \tag{6}$$

являются рациональными, то теорема 2 вытекает из теоремы Черкаса [4].

Функции (6) содержат в качестве слагаемых рациональные функции, зависящие от x (алгебраическая часть) и функции вида $\ldots \ln(\ldots)$, $\ldots \operatorname{arctg}(\ldots)$ (логарифмическая часть).

Теорема 3. *Для того чтобы система (1) имела центр, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений*

$$R_i(x) = R_i(y), \quad L_i(x) = L_i(y), \quad i = 1, 2,$$

где $R_i(x)$ – алгебраические части, $L_i(x)$ – логарифмические части функций (6), имела решение $y = y(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Доказательство теоремы 3 использует тот факт, что решение (4) системы (3) – алгебраическая функция.

Задача. Требуется построить все рациональные системы Льенара (1) с центром, если

$$f(x) = \frac{x(1 + ax + bx^2 + cx^3)}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3}, \quad a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0. \tag{7}$$

Для решения этой задачи использовалась теорема 3. Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Если исключить линейную зависимость f, g и случай (3), то для того чтобы система (1) с функцией $f(x)$ вида (7) имела центр, необходимо и достаточно чтобы функция $B(x)$ и функции $f(x)$, $g(x)$, представленные в виде (5), были следующими:*

а)
$$f(x) = \frac{x(4 + 4ax + 4bx^2 + (A^3 - 2aA^2 + 3Ab)x^3)}{4(1 + Ax)^2} = \frac{1}{12}B'(x),$$

$$g(x) = r(B(x))B'(x), \quad B(x) = \frac{x^2(6 + (4a - 2A)x + (A^2 - 2aA + 3b)x^2)}{1 + Ax},$$

б)
$$f(x) = \frac{x(2A + 3cx^2 + 2Acx^3)}{2A(1 + Ax)(1 - 2Ax)} = \frac{2A + cB(x)}{12A(1 - A^2B(x))}B'(x),$$

$$g(x) = r(B(x))B'(x), \quad B(x) = x^2(3 + 2Ax),$$

в)
$$f(x) = \frac{x(3 + 9Cx + 3bx^2 + bCx^3)}{3(1 + Cx)(1 + 3Cx)^2} = \frac{3 + bB(x)}{18(1 + C^2B(x))}B'(x),$$

$$g(x) = r(B(x))B'(x), \quad B(x) = \frac{x^2(3 + Cx)}{1 + 3Cx},$$

г)
$$f(x) = \frac{x(6 + 6ax + 6bx^2 + (3Ab - aA^2)x^3)}{6(1 + Ax)^3} = \frac{1}{2}B'(x),$$

$$g(x) = r(B(x))B'(x), \quad B(x) = \frac{x^2(6 + 4Ax + (3b - Aa)x^2)}{6(1 + Ax)^2},$$

где $r(x)$ – любая рациональная функция со знаменателем $s(x)$, $s(0) \neq 0$.

Литература

1. Чеботарев, Н. Г. *Теория алгебраических функций.* М.: Изд-во ЛКИ, 2007.

2. Отроков Н. Ф. *Аналитические интегралы и предельные циклы.* Горький: Волго-Вятское книжное издательство, 1972.

3. Руденок А. Е. *Обобщенная симметрия системы Льенара* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 180–191.

4. Черкас Л. А. *Об одном признаке отличия центра от фокуса для уравнения Льенара* // Докл. АН БССР. 1978. Т. 22. № 11. С. 969–970.