ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ «НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА» СИСТЕМ ЛЬЕНАРА ТИПА $3A+2S$ И СИММЕТРИЧНЫМ ВЕКТОРНЫМ ПОЛЕМ

И.Н. Сидоренко

Рассмотрим систему Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x^2)(1-(Lx)^2) - \epsilon f(x)y, \tag{1}$$

где $0 < L < 1$, $f(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^{2i}$, $a_i \in \mathbb{R}$. Система (1) имеет в конечной части плоскости три антиседла и два седла $(3A+2S)$ и может иметь предельные циклы вокруг каждого из антеседел, либо предельные циклы, окружающие сразу все особые точки. Данная работа является продолжением и развитием [1, 2]. Целью данной работы является исследование максимального количества предельных циклов «нормального размера» [2] у систем (1), а также построение конкретных систем рассматриваемого класса с различными распределениями предельных циклов. Для исследования семейства систем (1) будем использовать прогнозный метод [3] оценки числа предельных циклов. Метод основывается на решении алгебраической системы уравнений

$$F(\xi) = F(\psi), \quad G(\xi) = G(\psi),$$

где $F(x) = \int f(x)\,du$, $G(x) = \int g(x)\,du$, промежутки изменения переменных ξ, ψ зависят от выбора особых точек, вокруг которых производится оценка числа предельных циклов. Для «улучшения» полученных систем используется метод, разработанный для возмущения негрубого фокуса [3]. Обозначим через a – вектор коэффициентов системы (1), и пусть при $a = a^0$ система имеет k предельных циклов вокруг точки $O(0,0)$, которые распределены не равномерно. Выберем на промежутке $I = [p,q]$, $p > 0$, точки $x_1, \ldots, x_{k+1}$ и рассмотрим функцию последования $\Delta(x, a^0 + \Delta a)$, $x \in I$, Δa – некоторое возмущение системы (1), тогда

$$\Delta(x_i, a^0 + \Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n \mathrm{tp}\,(i,j)\Delta a_j + o(\Delta a),$$

где $\mathrm{tp}\,(i,j) = \partial\Delta^k(x_i^k, a^0)/\partial a_j$ находятся численно. Далее решаем задачу линейного программирования

$$L \to \min, \quad \pm(-1)^i\left(\Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n \mathrm{tp}^k(i,j)\Delta a_j\right) \geqslant 0, \quad i = \overline{1, k+1}, \quad |\Delta a_j| \leqslant L. \tag{2}$$

Если задача (2) имеет решение $\Delta a = \Delta a^*$, $L = L^*$, то соответствующая система Льенара имеет, по крайней мере, k предельных циклов.

Теорема. *Максимальное число предельных циклов, окружающих группу особых точек, у системы (1) при* $m = 2, \ldots, 8$ *не меньше чем* $m+1$.

Для точной оценки числа предельных циклов систем (1) при $m = 1, 2$ предполагается построение функции Дюлака–Черкаса [3].

Литература

1. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы «нормального размера» систем Льенара с пятью особыми точками и симметричным векторным полем* // XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2018): тез. докл. Междунар. науч. конф. 2018. Ч. 1. С. 94–95.

2. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы нормального размера систем Льенара с симметрией* // Весн. Магілеўск. дзярж. ўн-та імя А.А. Куляшова. 2009. № 4 (34). С. 167–174.

3. Сидоренко И. Н., Черкас Л. А. *Предельные циклы «нормального размера» некоторых полиномиальных систем Льенара* // Весн. Магілеўск. дзярж. ўн-та імя А.А. Куляшова. 2009. № 4 (34). С. 167–174.

4. Черкас Л. А., Гринь А. А., Булгаков В. И. *Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход)*. Гродно: ГрГУ. 2013.