ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ НЕРАЗРЕШИМОСТИ ПРОБЛЕМЫ ЦЕНТРА И ФОКУСА

Д.Н. Чергинец

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y^{11} + x^4 y^3 + 2\mu x^3 y^6 + a_1 x^7 y^2,$$

$$\dot{y} = -x^3 y^4 - 3(1+\varepsilon^2) x^7 y^2 - 3\varepsilon^2 x^{11} + \mu x^2 y^7 + a_2 x^6 y^3, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \mu, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq 0$. Начало координат системы (1) является центром или фокусом. В работе [1] при $a_1 = -3/2$, $a_2 = -3$ получено следующее асимптотическое представление функции последования: $c + k_2 c^2 + o(c^2)$, где k_2 – функция параметров системы, $c \to 0$, и доказано, что уравнение $k_2 = 0$ эквивалентно уравнению $\mu K_0 = 2I(\varepsilon)$, где

$$K_0 = 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{t(1+3t^4)} \exp\left(-\int\limits_{+\infty}^{t} \frac{\tau^3}{3\tau^4+1}\, d\tau\right) dt,$$

$$I(\varepsilon) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\omega^2\, d\omega}{(\omega^2+1)^{7/6+\gamma}(\omega^2+\varepsilon^2)^{1-\gamma}} = A - \frac{\pi}{2}\varepsilon + B\varepsilon^2 - \frac{\pi}{6}\varepsilon^3 \ln\varepsilon + O(\varepsilon^3),$$

$\varepsilon \to 0$, $\gamma = \varepsilon^2/(6(1-\varepsilon))$, $K_0, A, B \in \mathbb{R}$, $K_0 \neq 0$. Интеграл под горизонтальной и перед вертикальной линией – это интеграл Адамара. Таким образом, неравенство $k_2 < 0$, при выполнении которого начало координат неустойчиво, и неравенство $k_2 > 0$, при выполнении которого начало координат асимптотически устойчиво, определяются неаналитической функцией. Это означает, что устойчивость по Ляпунову аналитически неразрешима.

С помощью результатов работ [2, 3] в настоящей работе получено следующее асимптотическое представление функции последования системы (1):

$$c + \sum_{i=2}^{15} k_{i,0} c^i + \sum_{i=8}^{15} k_{i,1} c^i \ln c + \sum_{i=14}^{15} k_{i,2} c^i \ln^2 c + o(c^{15}).$$

Здесь коэффициент $k_{2,0}$ имеет вид

$$k_{2,0} = -4\varepsilon^{-2\lambda} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{t^2(a_2 t^4 + a_1(t^4 + 3\varepsilon^2 + 3t^2(1+\varepsilon^2)))}{9(1+t^2)^{13/6+\lambda}(\varepsilon^2+t^2)^{2-\lambda}}\, dt - 3^{-2/3}\varepsilon^{-2\lambda} B\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right),$$

где B – бета-функция.

Теорема 1. *Начало координат системы* $\tilde{(1)}$ *асимптотически устойчиво при* $k_{2,0} > 0$ *и неустойчиво при* $k_{2,0} < 0$.

Доказано, что $k_{8,1} = k_{14,1} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu = 0$.

Теорема 2. *Для того чтобы начало координат системы (1) было центром необходимо, чтобы* $\mu = 0$.

Функция $I(\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon \neq 0$, из чего вытекает следующее следствие.

Следствие. *Начало координат системы (1) при* $a_1 = -3/2$, $a_2 = -3$ *является фокусом.*

В [4] найдена система, необходимые и достаточные условия центра для которой представляются через неалгебраические функции. Система, необходимые и достаточные условия центра для которой представлялись бы через неаналитические функции, на данный момент не найдена.

Литература

1. Медведева Н. Б. *Об аналитической неразрешимости проблемы устойчивости на плоскости* // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68. Вып. 5 (413). С. 147–176.

2. Садовский А. П. *Проблема центра и фокуса для аналитических систем с нулевой линейной частью. I* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 5. С. 790–799.

3. Чергинец Д. Н. *Функция соответствия для систем с простым седлом* // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2008. № 1. С. 71–76.

4. Ильяшенко Ю. С. *Алгебраическая неразрешимость и почти алгебраическая разрешимость проблемы центр–фокус* // Функц. анализ и его приложения. 1972. Т. 6. Вып. 3. С. 30–37.