ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПЯТОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

М.В. Шамолин

В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем нечетного (третьего и пятого) порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладким многообразиям. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z_1, Z_2)v, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}
\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha),\\
Z_2' = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),\\
Z_1' = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),\\
\beta' = Z_1 f(\alpha),
\end{gathered} \tag{2}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\delta'(\alpha)},$$

$\mu = \mathrm{const}$. При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля – параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', Z_2' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$, а во второй строке – коэффициенты из уравнения для α'. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b, b_1 \geqslant 0$, $\mu \in \mathbb{R}$) будут иметь вид

$$U\begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\delta'(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \tilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U – преобразование с определителем, равным $-\mu$, и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также работы [1–3]).

Перейдем к интегрированию искомой системы пятого порядка (1), (2) при выполнении свойств

$$2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) \equiv 0, \quad \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) = \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{4}$$

Тогда система (1), (2) при выполнении равенств (4) обладает четырьмя независимыми (вообще говоря, трансцендентными в смысле комплексного анализа) первыми интегралами.

Справедлива и теорема, обратная к теореме 1.

Теорема 2. *Условия (4), (4) (например, при $\kappa = -1$) являются необходимыми условиями существования набора первых интегралов для системы (1), (2).*

Литература

1. Шамолин М. В. *Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия* // Докл. РАН. 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.

2. Шамолин М. В. *Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия* // Докл. РАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.

3. Шамолин М. В. *Новый случай интегрируемой системы с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере* // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2018. № 3. С. 34–43.