ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В КЛАССЕ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В.В. Альсевич

В классе дискретных управляющих воздействий рассматривается задача оптимального управления:

$$J(u) = \varphi(x(t^*)) \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), u(t)), \quad t \in T = [0, t^*], \quad x(t) = \gamma(t), \quad t \in [-\alpha, 0], \tag{2}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T. \tag{3}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $y(t) = x(t-\alpha)$, $\alpha > 0$ – запаздывание, $\gamma(t)$, $t \in [-\alpha, 0]$, – заданная функция, U – выпуклый компакт, $f(x, y, u) = f_0(x, y) + B(x, y)u$.

Управляющее воздействие $u(t)$, $t \in T$, называется дискретным (с периодом квантования $h > 0$), если

$$u(\tau) = u(t), \quad \tau \in [t, t+h[, \quad t \in T_h = \{0, h, 2h, \ldots, t^* - h\},$$

где $h = t^*/N$, N – натуральное число. Дискретные управляющие воздействия отличаются от кусочно-постоянных тем, что их точками разрыва могут быть только моменты множества T_h.

Дискретные управляющие воздействия естественны с прикладной точки зрения, поскольку при решении нетривиальных задач неизбежно использование вычислительных устройств дискретного действия.

Несмотря на то, что динамика системы в задаче (1)–(3) описывается в непрерывном времени, условия оптимальности подобны тем, которые известны для дискретных систем [1]. Для обыкновенных систем с произвольной функцией $f(x, u)$ в [2] доказан принцип квазимаксимума, а для частного случая задачи (1)–(3) – дискретный принцип максимума.

Для систем с запаздыванием самого общего вида в [3] доказан принцип максимума в случае кусочно-непрерывных управлений. В данном докладе приводится дискретный принцип максимума для систем с запаздыванием, когда в качестве допустимых управлений рассматриваются дискретные функции. Заметим, что правая часть системы (2) имеет специальный вид. Для общего случая правой части, как и для обыкновенных систем, справедлив принцип квазимаксимума, который здесь не приводится. Отметим также, что в [4] дискретный принцип максимума приведен для несколько иной правой части системы (1), чем в данном докладе.

Будем предполагать, что функции $f_0(x, y)$, $B(x, y)$, $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы по своим переменным. С целью упрощения рассмотрен случай, когда $\alpha = Kh$, K – натуральное число.

Пусть $u(t)$, $t \in T$, – допустимое управление в задаче (1)–(3), $x(t)$, $t \in T$, – соответствующее решение системы (2). Введем обозначения: $\delta_\omega(t) = 1$, если $t \in \omega$,

$\delta_\omega(t) = 0$, если $t \notin \omega$, $H(t) = = H(x(t), y(t), \psi(t), u(t)) = \psi'(t) f(x(t), y(t), u(t))$. Здесь $\psi(t)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы:

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x} - \delta_{[0,t^*-\alpha]}(t)\frac{\partial H(t+\alpha)}{\partial y}, \quad t \in T, \tag{4}$$

$$\psi(t^*) = -\frac{\partial \varphi(x(t^*))}{\partial x}. \tag{5}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 (дискретный принцип максимума). *Если* $u(t)$, $t \in T$, *– оптимальное управление в задаче* (1)–(3), *то вдоль него и соответствующих решений* $x(t)$, $t \in \in T$, *прямой системы* (2) *и* $\psi(t)$, $t \in T$, *сопряженной системы* (4), (5) *выполняется условие*

$$\left(\int\limits_t^{t+h} \psi'(s) B(x(s), y(s))\, ds\right) u(t) = \max_{v \in U} \left(\int\limits_t^{t+h} \psi'(s) B(x(s), y(s))\, ds\right) v, \quad t \in T_h. \tag{6}$$

Условие (6) может оказаться неэффективным при проверке допустимого управления на оптимальность. В этом случае можно использовать другие условия.

Допустимое управление $u(t)$, $t \in T$, называется особым, если на нем и соответствующих решениях $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, прямой и сопряженной систем выполняется тождество

$$\left(\int\limits_t^{t+h} \psi'(s) B(x(s), y(s))\, ds\right) u(t) \equiv \left(\int\limits_t^{t+h} \psi'(s) B(x(s), y(s))\, ds\right) v,$$

$$\forall v \in V(t) \subseteq U, \quad t \in \tilde{T}_h \subseteq T_h.$$

В классе кусочно непрерывных управлений для произвольной правой части системы (2) необходимые условия оптимальности особых управлений для обыкновенных систем доказаны в [5], для систем с запаздыванием – в [3]. Для сокращения записей обозначим $f(t) = f(x(t), y(t), u(t)$, $B(t) = B(x(t), y(t))$. Будем также считать, что функции $f_0(x, y)$, $B(x, y)$, $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по своим переменным, $V(t) = U$, $t \in \tilde{T}_h$. При указанных условиях в классе дискретных управлений для задачи (1)–(3) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $u(t)$, $t \in T$, *– оптимальное особое управление в задаче (1)–(3), то вдоль него и соответствующих решений* $x(t)$ *и* $\psi(t)$, $t \in T$, *прямой системы (2) и сопряженной системы (4), (5) выполняется условие (6) для* $t \notin \tilde{T}_h$, *а для* $t \in \tilde{T}_h$ *– условие*

$$(v - u(t))' \left(\int\limits_t^{t+h} \left(B'(\tau)\overline{\Psi}(\tau) + \left(\frac{\partial \psi'(\tau) B(\tau)}{\partial x}\right)'\right) \int\limits_t^{\tau} B(s)\, ds\, d\tau\right)(v - u(t)) \leqslant 0, \quad v \in U,$$

где $\overline{\Psi}(t) = \Psi(t) + C(t)$, $C(t) = \delta_{[0,t^*-\alpha[}(t) \int_{t+h}^{t^*} G(\tau, t)\, d\tau$, $\Psi(t)$ *– решение матричного уравнения*

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial f'(t)}{\partial x}\Psi(t) - \Psi(t)\frac{\partial f(t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 H(t)}{\partial x^2} - \delta_{[0,t^*-\alpha[}(t)\frac{\partial^2 H(t+\alpha)}{\partial y^2}, \quad t \in T,$$

$$\Psi(t^*) = -\frac{\partial^2 \varphi(x(t^*))}{\partial x^2}, \quad G(\tau,t) = F'(\tau,t)\Gamma(\tau,t) + \Gamma'(\tau,t)F(\tau,t),$$

$$\Gamma(\tau,t) = \left(\frac{\partial^2 H(\tau)}{\partial x \partial y} + \Psi(\tau)\frac{\partial f(\tau)}{\partial y}\right) F(t-\alpha,t),$$

$F(\tau,t)$ – *решение уравнения*

$$\frac{\partial F(\tau,t)}{\partial t} = -F(\tau,t)\frac{\partial f(t)}{\partial x} - \delta_{[0,t^*-\alpha[}(t)F(\tau,t+\alpha)\frac{\partial f(t)}{\partial y}, \quad F(t,t) = E.$$

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Качественная теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1971.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Альсевич В. В., Калинин А. И., Крахотко В. В., Павленок Н. С. *Методы оптимизации.* Мн.: Четыре четверти, 2011.

3. Альсевич В. В. *Оптимизация динамических систем с запаздываниями.* Мн.: БГУ, 2000.

4. Габасов Р., Альсевич В. В., Русакова Д. В. *Оптимизация динамических систем с запаздыванием в классе дискретных управляющих воздействий* // Междунар. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» к 95-летию со дня рожд. акад. Е.А. Барбашина: тез. докл. Минск, 1–5 окт. 2013 г. Мн.: БГУ, 2013. С. 103–105.

5. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Особые оптимальные управления.* М.: Наука, 1973. (Переизд. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2012).