УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕДИАГОНАЛЬНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.И. Безяев

Исследованию параболических систем, в том числе устойчивости их решений, посвящена достаточно обширная литература (см., например, [1–4] и ссылки в них). В настоящей работе приведены условия устойчивости или неустойчивости решений задачи Коши-Дирихле для квазилинейных параболических систем, определяемых нормальной матрицей. Предлагаемый здесь метод позволяет исследовать устойчивость по спектру определяющей матрицы. Этот метод основан на известных методах исследования квазилинейных параболических систем (см., например, [2–4]) и квазилинейных систем ОДУ (см., например, [5]).

Рассмотрим класс квазилинейных параболических систем с недиагональной определяющей матрицей

$$u_t + \operatorname{div}(A(x,u)\operatorname{grad} u) + b(x,u,\operatorname{grad} u) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega \times (0,\infty), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где $u_0(x) \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей, $u : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^N$, $u = u(x,t)$, $A - (2N \times 2N)$-матричная функция с достаточно гладкими элементами на $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^N$. На вещественные матрицы $A(x,v), A'_x(x,v)$ и $A'_v(x,v)$ накладываются условия ограниченности на $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^N$. Предполагается также, что векторная функция $b(x,v,p)$ достаточно гладкая и ограниченная при $(x,v,p) \in \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{2N}$, а нелинейный оператор $b(x,v,p)$, определенный в шаре $\|v\| \leqslant r$ $(\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)})$, с областью значений в $L_2(\Omega)$, удовлетворяет условию

$$\|b(x,v,p)\| \leqslant C\|v\|^{1+\delta} \quad \text{для} \quad \|v\| < \eta, \quad \delta > 0.$$

При этом рассматриваются только системы, имеющие решения, определенные при всех значениях $t \in [0,\infty)$ для любых начальных функций из заданного множества.

Теорема. *Пусть матрица $A(x,v)$ нормальная $(AA^* = A^*A)$ при всех $(x,v) \in \in \overline{\Omega}\times\mathbb{R}^N$, $\{\lambda_j(x,v)\}_1^n$ – ее спектр и выполнены условия, приведенные перед теоремой. Тогда решение $u(x,t) \equiv 0$ задачи (1) является:*

1) устойчивым (в $L_2(\Omega)$), если $\operatorname{Re}\lambda_j(x,v) \leqslant 0$ для $j = \overline{1,n}$, $(x,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$;
2) асимптотически устойчивым (в $L_2(\Omega)$), если $\operatorname{Re}\lambda_j(x,v) \leqslant -\beta < 0$ для $j = \overline{1,n}$, $(x,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$;

3) неустойчивым (в $L_2(\Omega)$), если $\operatorname{Re}\lambda_j(x,v) \geqslant \beta > 0$ для $j = \overline{1,n}$, $(x,v) \in \overline{\Omega}\times\mathbb{R}^N$.

Заметим, что из условия 2) данной теоремы вытекает условие строгой эллиптичности в [4], что в случае симметричности матрицы A гарантирует (например, при малом $|b|$) существование гладкого решения задачи (1) для $t \in [0,\infty)$. При исследовании устойчивости предлагаемым методом размерность переменной x не имеет значения, но она играет важную роль в вопросах существования и регулярности решений [4].

Литература

1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967.

2. Сиразетдинов Т. К. *Устойчивость систем с распределенными параметрами.*. М.: Наука, 1987.

3. Шестаков А. А. *Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами.*. М.: Наука, 1990.

4. Arkhipova A. A. *Heat flow for a class of quadratic functionals with nondiagonal principal matrix. Existence of a smooth global solution* // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 2. С. 45–75.

5. Bezyaev V. I. *On stability of solutions to certain differential equations with discontinuous right-hand sides* // Eurasian Math. J. 2016. V. 7 № 4. P. 79–84.