АЛГОРИТМ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ И СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Н.М. Дмитрук

Рассматривается задача оптимального гарантированного управления линейной динамической системой с возмущениями и смешанными ограничениями:

$$\min_u \max_w \; c'x(T), \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

$$Hx(t) + Gu(t) \leqslant g \;\; \forall w(t) \in W, \; t \in [0, T]. \tag{3}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ – управление, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ – возмущение в момент времени t; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{m\times r}$ – заданные матрицы; $U \subset \mathbb{R}^r$ – выпуклый компакт, W – гиперкуб в $\mathbb{R}^p$: $W = \{w \in \mathbb{R}^p : \|w\|_\infty \leqslant w_{\max}\}$, где $0 < w_{\max} < +\infty$, $\|w\|_\infty = \max_{k=\overline{1,p}} |w_k|$. В задаче (1)–(3) требуется выполнить ограничения (4) с гарантией, т.е. при всех возможных возмущениях. При этом требуется найти гарантированное значение критерия качества – минимальную стоимость $c'x(T)$ при наихудшей реализации возмущения.

Предполагается, что состояния системы управления (2) доступны для измерений в дискретные моменты времени $\tau \in \Delta = \{0, h, \ldots, T-h\}$, $h = T/N$, $N \in \mathbb{N}$. Полученные измерения обозначаются $x^*(\tau)$ и отличаются от состояний $x(\tau)$ системы (2) в силу реализующихся в каждом конкретном процессе управления возмущений $w^*(t)$, $t \in [0, T]$, и выбранных управляющих воздействий $u^*(t)$, $t \in [0, T]$.

Исследуется случай, когда централизованное управление в реальном времени [1, 2], при котором общий центр управления (центральный регулятор) вырабатывает управляющие воздействия для всех входов в задаче (1)–(3), невозможно. В связи с этим предлагается алгоритм децентрализованного управления [2–4], при котором r локальных регуляторов формируют локальные управляющие воздействия каждый для своего входа j, $j = \overline{1, r}$.

Процесс децентрализованного управления организуется в режиме реального времени: j-й локальный регулятор в каждый момент $\tau \in \Delta$ по текущему измерению $x^*(\tau)$ состояния и некоторой информации от остальных регуляторов вычисляет управляющее воздействие $u_j^*(t)$, $t \in [\tau, \tau + h[$, которое подается на j-й вход до поступления следующего измерения. Для этого он решает локальную прогнозирующую задачу оптимального управления, которую в настоящей работе предлагается формулировать в виде

$$\mathcal{P}_j(\tau) : \min_{u_j} \max_w \; c'x(T), \tag{4}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_j u_j(t) + \omega_j M w(t), \quad x(\tau) = \omega_j x^*(\tau), \quad u(t) \in U, \quad t \in [\tau, T],$$

$$Hx(t) + G_j u_j(t) \leqslant y_j^d(t \mid \tau - h) + \omega_j (g - y^d(t \mid \tau - h)) \quad \forall w(t) \in W, \quad t \in [\tau, T],$$

где B_j, G_j – j-е столбцы матриц B, G; $\omega_j > 0$ – весовой коэффициент, $\sum_{j=1}^r \omega_j = 1$; $y_j^d(t \mid \tau - h)$, $t \in [\tau, T]$, – j-й локальный выходной сигнал, построенный в предыдущий момент $\tau - h$ (см. ниже); $y_j^d(t \mid \tau - h) = \sum_{j=1}^r y_j^d(t \mid \tau - h)$, $t \in [\tau, T]$.

Задача (4) построена по принципам, изложенным в работах [2, 4]. Переменной оптимизации в (4) является только локальное управление $u_j(t)$, $t \in [\tau, T]$. Решение задачи (4) обозначается через $u_j^d(t \mid \tau)$, $t \in [\tau, T]$, по нему вычисляется локальный выходной сигнал

$$y_j^d(t \mid \tau) = \int\limits_{\tau+h}^{t} He^{A(t-s)} B_j u_j^d(s \mid \tau)\, ds + G_j u_j^d(t \mid \tau), \quad t \in [\tau + h, T].$$

При децентрализованном управлении локальные регуляторы, как правило [3], инициализируются с помощью оптимального программного управления $u^0(t)$ задачи (1)–(3) (естественно, предполагается, что задача (1)–(3) имеет решение). Это означает, что

$$u_j^d(t \mid 0) = u_j^0(t), \quad t \in [0, T], \quad y_j^d(t \mid 0) = \int\limits_{h}^{t} He^{A(t-s)} B_j u_j^0(s)\, ds + G_j u_j^0(t), \quad t \in [h, T].$$

Процесс децентрализованного управления тогда начинается в момент $\tau = h$, локальные прогнозирующие задачи $\mathcal{P}_j(\tau)$ определяются для $\tau \in \Delta \setminus \{0\}$.

Отметим, что децентрализация позволяет понизить размерность решаемых задач оптимального управления, что важно для численных методов и вычислений в реальном времени. Кроме того, формулировка (4) позволяет предложить простую схему обмена информацией между регуляторами. Действительно, для формирования данных задачи $\mathcal{P}_j(\tau)$ регулятору j достаточно к моменту $\tau \in \Delta \setminus \{0\}$ получить от остальных регуляторов функции $y_k^d(t \mid \tau - h)$, $t \in [\tau, T]$, построенные ими локально по решениям задач $\mathcal{P}_k(\tau - h)$, $k \neq j$, $k = \overline{1, r}$, в предыдущий момент времени $\tau - h$.

Приведем алгоритм оптимального децентрализованного управления.

Шаг 1. Положить $\tau = 0$, $x^*(\tau) = x_0$.

Шаг 2. Найти оптимальную гарантирующую программу $u^0(t)$, $t \in [0, T]$, задачи (1)–(3). Для каждого $j = \overline{1, r}$ положить $u_j^d(t \mid 0) = u_j^0(t)$, $t \in [0, T]$, найти $y_j^d(t \mid 0)$, $t \in [h, T]$.

Для каждой подсистемы j (параллельно):

Шаг 3. Подать на вход управление $u_j^*(t) \equiv u_j^d(t \mid \tau)$, $t \in [\tau, \tau + h[$.

Шаг 4. Передать $y_j^d(t \mid \tau - h)$, $t \in [\tau, T]$, всем подсистемам $k = \overline{1, r}$, $k \neq j$.

Шаг 5. Положить $\tau = \tau + h$, при $\tau = T$ завершить работу алгоритма.

Шаг 6. Решить задачу $\mathcal{P}_j(\tau)$ и найти $u_j^d(t \mid \tau)$, $t \in [\tau, T]$. Вычислить $y_k^d(t \mid \tau)$, $t \in [\tau + h, T]$. Вернуться к шагу 3.

Функция $u^*(t) = (u_j^*(t), j = \overline{1,r})$, $t \in [0,T]$, получаемая в результате работы описанного алгоритма, – реализация оптимальной децентрализованной обратной связи [2, 4].

Свойства решений задач $\mathcal{P}_j(\tau)$, $j = \overline{1,r}$, дает

Утверждение. *Пусть задача (1)–(3) имеет решение. Тогда для любого* $\tau \in \Delta\setminus\{0\}$ *выполняются следующие свойства:*

1) (рекурсивная разрешимость) все задачи $\mathcal{P}_j(\tau)$, $j = \overline{1,r}$, *имеют решение;*

2) (допустимость) функция $u^d(t \mid \tau) = (u_j^d(t \mid \tau),\ j = \overline{1,r})$, $t \in [\tau, T]$, *является гарантирущей программой в задаче (1)–(3), т.е. вдоль нее и соответствующих траекторий системы (2) ограничения (4) выполняются для всех возможных возмущений;*

3) (монотонность) гарантированная стоимость монотонна:

$$\gamma_0(\tau) + c'x^d(t \mid \tau) \leqslant \gamma_0(\tau - h) + c'x^d(t \mid \tau - h),$$

где $\gamma_0(\tau) = w_{\max} \int_\tau^T \|c'e^{A(T-s)}M\|_1\, ds$ *– оценка возмущения;* $x^d(t \mid \tau)$, $t \in [\tau, T]$, *– траектория номинальной системы (2) (при* $w \equiv 0$*) под действием управления* $u^d(t \mid \tau)$, $t \in [\tau, T]$.

Результаты работы алгоритма децентрализованного управления и сравнение его эффективности с централизованным управлением иллюстрируются в докладе на примере задачи расширяющейся экономики фон Неймана.

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Принципы оптимального управления* // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 1. С. 15–18.

2. Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М. *Оптимальное децентрализованное управление динамическими системами в условиях неопределенности* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 7. С. 1209–1227.

3. Christofides P. D., Scattolini R., de la Pena D. M., Liu J. *Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions* // Computers & Chemical Eng. 2013. V. 51. P. 21–41.

4. Dmitruk N. *Robust optimal control of dynamically decoupled systems via distributed feedbacks* // Optimization in the Natural Sciences. Communications in Computer and Information Science. Springer. 2015. V. 499. P. 95–106.