ОБ УПРАВЛЕНИИ СПЕКТРОМ И СТАБИЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

В.А. Зайцев, И.Г. Ким

Рассмотрим билинейную стационарную дифференциальную систему с несколькими запаздываниями в состоянии следующего вида:

$$\dot{x}(t) = A_{00}x(t) + u_{01}A_{01}x(t) + \ldots + u_{0r_0}A_{0r_0}x(t) +$$
$$+ A_{10}x(t-h_1) + u_{11}A_{11}x(t-h_1) + \ldots + u_{1r_1}A_{1r_1}x(t-h_1) + \ldots$$
$$\ldots + A_{s0}x(t-h_s) + u_{s1}A_{s1}x(t-h_s) + \ldots + u_{sr_s}A_{sr_s}x(t-h_s), \tag{1}$$

с начальными условиями $x(\tau) = \mu(\tau)$, $\tau \in [-h_s, 0]$, где h_j – постоянные вещественные запаздывания такие, что $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_s$, $\mu : [-h_s, 0] \to \mathbb{K}^n$ – непрерывная функция; $x \in \mathbb{K}^n$ – фазовый вектор, $u_k = \operatorname{col}(u_{k1}, \ldots, u_{kr_k}) \in \mathbb{K}^{r_k}$ – векторы управляющих воздействий, A_{kj} – $n \times n$-матрицы над полем $\mathbb{K}$, $k = \overline{0, s}$, $j = \overline{0, r_k}$; здесь $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Через

$$\varphi(\lambda) = \det\left[\lambda I - \left(A_{00} + \sum_{j=1}^{r_0} u_{0j}A_{0j}\right) - \sum_{k=1}^{s} e^{-\lambda h_k}\left(A_{k0} + \sum_{\ell=1}^{r_k} u_{k\ell}A_{k\ell}\right)\right]$$

обозначим характеристическую функцию системы (1). Эта функция является квазиполиномом. Множество $\sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda) = 0\}$ корней характеристического уравнения образует спектр системы (1). В общем случае спектр σ системы с запаздыванием (1) состоит из счетного числа точек $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. Если характеристический квазиполином обращается в полином, то характеристическое уравнение имеет конечное число корней, т.е. спектр σ является конечным множеством.

Определение 1. Будем говорить, что *для системы (1) разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством стационарного управления*, если для любых $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, существуют постоянные $\widehat{u}_k \in \mathbb{K}^{r_k}$, $k = \overline{0, s}$, такие, что характеристический квазиполином $\varphi(\lambda)$ системы (1) с управлениями $\widehat{u}_k$, $k = \overline{0, s}$, совпадает с полиномом $q(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$.

Пусть коэффициенты системы (1) имеют следующий специальный вид: матрица A_{00} имеет нижнюю форму Хессенберга с ненулевыми элементами наддиагонали; первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц A_{kj}, $k = \overline{0, s}$, $j = \overline{0, r_k}$, $(k, j) \neq (0, 0)$, равны нулю, т.е.

$$A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots} & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}; \tag{2}$$

$$A_{kj}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ \widehat{A}_{kj} & 0\end{pmatrix},\quad \widehat{A}_{kj}\in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}),\quad k=\overline{0,s},\quad j=\overline{0,r_k},\quad (k,j)\neq(0,0),\quad p\in\{1,\dots,n\}. \tag{3}$$

По системе (1) построим матрицы $\varGamma_k\in M_{n,r_k}(\mathbb{K})$, $k=\overline{0,s}$, $\varLambda_k\in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $k=\overline{1,s}$:

$$\varGamma_k=\begin{pmatrix}\operatorname{Sp}(A_{k1}) & \operatorname{Sp}(A_{k2}) & \dots & \operatorname{Sp}(A_{kr_k})\\ \operatorname{Sp}(A_{k1}A_{00}) & \operatorname{Sp}(A_{k2}A_{00}) & \dots & \operatorname{Sp}(A_{kr_k}A_{00})\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \operatorname{Sp}(A_{k1}A_{00}^{n-1}) & \operatorname{Sp}(A_{k2}A_{00}^{n-1}) & \dots & \operatorname{Sp}(A_{kr_k}A_{00}^{n-1})\end{pmatrix},\quad \varLambda_k=\begin{pmatrix}\operatorname{Sp}(A_{k0})\\ \operatorname{Sp}(A_{k0}A_{00})\\ \dots\\ \operatorname{Sp}(A_{k0}A_{00}^{n-1})\end{pmatrix};$$

и матрицы $\varDelta_k=[\varGamma_k,\varLambda_k]\in M_{n,r_k+1}(\mathbb{K})$, $k=\overline{1,s}$.

Теорема. *Пусть матрицы A_{kj}, $k=\overline{0,s}$, $j=\overline{0,r_k}$, системы (1) имеют специальный вид (2), (3). Тогда для системы (1) разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством стационарного управления в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:*

$$\operatorname{rank}\varGamma_0=n,\quad \operatorname{rank}\varGamma_k=\operatorname{rank}\varDelta_k,\quad k=\overline{1,s}. \tag{4}$$

Теорема обобщает результаты работы [1] на системы с запаздываниями по состоянию.

Следствие. *Пусть матрицы A_{kj}, $k=\overline{0,s}$, $j=\overline{0,r_k}$, системы (1) имеют специальный вид (2), (3). Пусть выполнены условия (4). Тогда система (1) стабилизируема (с произвольной наперед заданной скоростью затухания) посредством стационарного управления.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18–51–41005) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект 1.5211.2017/8.9).

Литература

1. Зайцев В. А. *Необходимые и достаточные условия в задаче управления спектром* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 12. С. 1789–1793.