

УДК 628.1

Н. А. Автушенко, Г. С. Ленецкий, канд. техн. наук, доц.**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ
В ТРУБОПРОВОДЕ С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ**

Рассмотрено математическое описание движения воды в системах магистральных трубопроводов, основанное на уравнении неразрывности среды, системы уравнений Навье-Стокса.

Полученный математический пакет описывает систему с распределенными параметрами и выполнен, исходя из условия динамического равновесия в точке потока, с учетом зависимости от характера течения потока и физических свойств среды. Расчет выполнен с использованием функций Бесселя. Методика расчета гидродинамической составляющей движения воды в системах магистральных трубопроводов носит универсальный характер и может быть использована при расчете, моделировании, оценке устойчивости гидравлических систем теплоснабжения и водоснабжения, а также для описания рабочего органа при построении систем управления гидравлическими параметрами схем тепло-, водоснабжения со значительной протяженностью трубопроводов.

Введение

Для решения конкретных задач в магистральных системах водоснабжения могут быть использованы квазиодномерные модели неустановившихся потоков. В таких моделях состояние потока рабочей среды в каждый момент времени характеризуется усредненными по сечению значениями давления, скорости и плотности, при этом в уравнения вводятся, полученные при усреднении по сечению потока перечисленные гидродинамические величины с коэффициентами количества движения, кинетической энергии и гидравлического сопротивления. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что мгновенные коэффициенты усреднения гидродинамических величин отличаются от квазистационарных значений [1].

**Линейная математическая модель неустановившегося движения
жидкости в трубе**

При течении жидкости удовлетворяется условие сплошности среды, полученное при выделении элементарного объема с неоднородной средой $\rho = f(x, y, z, t)$ [3].

$$\varepsilon = \omega \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\rho}{B_{TP}}}$$

Уравнение неразрывности среды в декартовой системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Скорости деформации частицы в момент ее прохождения через точку 0 с координатами x, y, z нормальны к поверхности второго порядка

$$\begin{cases} X = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}; \\ Y = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}; \\ Z = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}, \end{cases}$$

где $U = f(x, y, z)$ – потенциальная функция.

Квадрат скорости течения жидкости в точке в данный момент

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.$$

В этой системе скорости деформации частицы направлены вдоль ее осей.

Форма поверхностей, ортогональных скоростям деформации и напряжениям в точке, не зависит от выбранной системы координат, следовательно, зависимость напряжений ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,$) от частных производных соответствующих составляющих скорости примет вид:

$$\sigma_1 = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \sigma_2 = 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \sigma_3 = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\begin{cases} \tau_1 = 2\mu\theta_1 = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right); \\ \tau_2 = 2\mu\theta_2 = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \tau_3 = 2\mu\theta_3 = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \end{cases}$$

где μ – динамическая вязкость движущейся жидкости.

Рассмотрим вопрос определения сил, возникающих в точке потока за счет вязкости для течения ньютоновской жидкости. Пусть проекция на ось Ox сил вязкости, отнесенных к единице объема и действующих в точке, определяемой в потоке координатами x, y, z :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} = \mu \left[2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right].$$

Дифференцируется уравнение неразрывности по x , получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).$$

Тогда проекция сил на оси Ox, Oy, Oz , возникающих за счет вязкости жидкости, равна:

$$\mu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right]; \quad \mu \left[\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right]; \quad \mu \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right].$$

Уравнения Эйлера примут вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right]; \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right]; \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]. \end{cases}$$

Полученная система уравнений носит название Навье-Стокса [2].

Эта система уравнений описывает условия динамического равновесия в точке потока при условии замены реальной жидкости среды сплошной средой, в которой напряжения не являются нормальными к площадкам, на которых они возникают. Значения производных, характеризующие наличие дополнительных, кроме давления напряжений, зависят от характера течения потока и физических свойств среды.

От общей системы уравнений перейдем к цилиндрическим координатам, т.к. рассматривается трубопровод.

При описании неустановившегося движения рабочей среды в цилиндрической круглой трубе поток считается осесимметричным с достаточно малыми изменениями температуры и давления для того, чтобы вязкость среды могла приниматься постоянной. Объемная вязкость среды при исследуемых процессах может не учитываться. При сделанных предположениях уравнение (2) описывается в цилиндрических координатах, ось x которых направлена по оси трубы, а координата r измеряется по радиусу поперечного сечения трубы, приводится к двум уравнениям Навье – Стокса:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \right]; \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{4}{3r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{4u_r}{3r^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_r}{x} \right) \right], \quad (6)$$

где u_x, u_r – проекции скорости на оси x и r .

Третье уравнение Навье-Стокса, содержащее угловые координаты, в данном случае исключается благодаря предположению об осесимметричном течении.

Уравнение (5) в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho \frac{u_r}{r} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Систему уравнений (5)...(7) можно упростить, если пренебречь членами, порядок которых значительно ниже порядка удерживаемых в уравнениях членов. Неустановившееся движение вязкой сжимаемой среды в трубе описывается системой, состоящей из двух уравнений:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \right], \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho \frac{u_r}{r} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Плотность, входящая в коэффициенты уравнений, является величиной постоянной.

Умножив (8) и (9) на $2\pi r dr$ и проинтегрировав в пределах от $r = 0$ до $r = r_0$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{r_0} 2\pi r u_x dr = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{r_0} 2\pi r p dr + v \int_0^{r_0} 2\pi r \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial r} \right] dr + \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{r_0} 2\pi r \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) dr; \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{r_0} 2\pi r \rho dr + \rho \int_0^{r_0} 2\pi r \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) dr + \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{r_0} 2\pi r u_x dr = 0. \quad (11)$$

Производную от скорости u_x по r при $r = r_0$ можно связать с нестационарным касательным напряжением на стенке трубы τ_{OH} , используя закон вязкого трения

$$\tau_{OH} = -\rho \cdot v \int_0^{r_0} 2\pi \cdot r \frac{\partial u_x}{\partial r} \Big|_{r=r_0}. \quad (12)$$

Если труба абсолютно жесткая, то значение u_{r_0} будет равно нулю. При наличии деформации стенок трубы u_{r_0} определяется скоростью деформации стенок трубы:

$$u_{r_0} = \frac{\partial r_0}{\partial t}.$$

Приращение dr_0 выражено через приращение напряжения в стенке трубы:

$$dr_0 = \frac{r_0}{E_{CT}} d\sigma, \quad (13)$$

где E_{CT} – модуль упругости материала стенки.

Так как $\sigma = pr_0/\delta$, то

$$d\sigma = \frac{1}{\delta} \left(r_0 \frac{\partial p}{\partial \rho} + p \frac{\partial r_0}{\partial t} \right) dt. \quad (14)$$

Используя интегралы и вышеперечисленные преобразования, уравнение (10) после деления всех его членов на πr_0^2 приведем к виду:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2\tau_{OH}}{\rho r_0} + \frac{2vr_0}{3\delta E_{CT}} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t}, \quad (15)$$

где $v = Q/\pi r_0^2$ – средняя по сечению трубы скорость среды в рассматриваемый момент времени.

Для выяснения влияния последнего члена правой части уравнения (15) запишем его в виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(p - \frac{2\rho v r_0}{3\delta E_{CT}} \frac{\partial p}{\partial t} \right) - \frac{2\tau_{OH}}{\rho r_0}. \quad (16)$$

При принятом выше масштабе времени, определяемом как l/c_0 , некоторые члены уравнения (16) будут пренебрежимо малой величиной.

При этом уравнение неразрывности (9) после деления на πr_0^2 приводится к виду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2\rho r_0}{\delta E_{CT}} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

Исключив из уравнения (17) производную $\partial p/\partial t$, уравнение примет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2\tau_{OH}}{\rho r_0} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{B_{TP}} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (18)$$

где B_{TP} – приведенный модуль упругости трубы;

$$B_{TP} = \frac{B}{1 + \frac{2r_0 B}{\delta E_{CT}}}; \quad \frac{1}{B_{TP}} = \frac{1}{B} + \frac{1}{E'_{CT}}; \quad E'_{CT} = \frac{\delta E_{CT}}{2r_0}. \quad (19)$$

Таким образом, для неустановившегося ламинарного движения сжимаемой среды в упругой цилиндрической трубе круглого сечения имеем систему уравнений (13) и (14). Эти уравнения применимы и в случае неустановившегося турбулентного движения среды, если неизвестные величины считать усредненными по Рейнольдсу, что будет допустимым, когда характерное время исследуемого процесса значительно превышает временной масштаб турбулентных пульсаций. В уравнение (13), кроме p и v , входит нестационарное касательное напряжение на стенке τ_{OH} трубы. Для получения замкнутой системы уравнений необходимо связать τ_{OH} с v или с p . При установившемся движении среды ($\partial v/\partial x = 0$) касательное напряжение на стенке трубы в установившемся потоке τ_{OY} полностью определяется перепадом давления на данном участке трубы. Величину τ_{OY} можно вычислить по известному из гидравлики соотношению

$$\tau_{OY(r=r_0)} = \frac{\lambda}{8} \rho v_y^2,$$

где λ – коэффициент сопротивления трения трубы при установившемся движении среды; v_y – средняя по сечению скорость в установившемся потоке.

Квазистационарное значение касательного напряжения τ_{OYKC} на стенке трубы в неустановившемся потоке принимается равным τ_{OY} , когда мгновенная средняя по сечению скорость v равна v_y , т. е.

$$\tau_{OYKC} = \frac{\lambda_{KC}}{8} \rho v^2, \quad (20)$$

где λ_{KC} – квазистационарный коэффициент сопротивления трубы, равный λ при $v = v_y$.

При ламинарном потоке, для которого $\lambda = 64/Re$

$$\tau_{OY KC} = \frac{4\rho v}{r_0} v. \quad (21)$$

Соотношение (21) можно получить также по уравнению (12), принимая параболическим закон распределения местных скоростей по сечению трубы. Следовательно, величина τ_{OH} в уравнении (18) может быть заменена квазистационарным значением $\tau_{OY KC}$ только при условии, что действительное распределение местных скоростей по сечению потока мало отличается от квазистационарного. В реальном неустановившемся потоке закон распределения местных скоростей может существенно отличаться от квазистационарного. Например, при колебаниях ламинарного потока среды в круглой трубе изменение местных скоростей в пристенных слоях опережает во времени изменение местных скоростей в центральных слоях [1].

Вследствие изменения закона распределения местных скоростей по сечению потока значения τ_{OH} в действительности отличаются от $\tau_{OY KC}$. Так как величина τ_{OH} изменяется по времени, связь ее со средней по сечению скоростью v среды следует искать в виде дифференциального уравнения или в виде динамических характеристик, принятых в теории автоматического регулирования и управления. При линейной модели неустановившегося течения наиболее полное представление о зависимости τ_{OH} от v можно получить с помощью передаточной функции.

$$W_v(s) = \frac{\tau(s)}{v(s)}, \quad (22)$$

где $\tau(s)$ и $v(s)$ – изображения по Лапласу нестационарного касательного напряжения на стенке трубы и средней по сечению потока скорости среды соответственно.

Для определения передаточной функции (21) воспользуемся уравнением (8), пренебрегая в нем теми членами, которые, как было показано выше, являются малыми. В результате имеем:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]. \quad (23)$$

Такое же уравнение можно получить, если среду считать несжимаемой и по-прежнему рассматривать ее движение в круглой цилиндрической трубе за пределами начального участка. Далее используем только уравнения (18), (23) и закон вязкого трения, поэтому полученная зависимость τ_{OH} от v будет справедливой для несжимаемой и сжимаемой среды в пределах допущений, принятых при выводе указанных уравнений.

Если величины u_x , p и v принять за отклонения от значений, соответствующих установившемуся течению среды, то после преобразования по Лапласу уравнения (23) при нулевых начальных условиях получим

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_x(s)}{\partial r} - \frac{s u_x(s)}{v} = \wp_x(s), \quad (24)$$

где s – переменная в преобразовании Лапласа; $u_x(s)$ – изображение по Лапласу местной скорости u_x ; $\wp_x(s)$ – изображение по Лапласу $\partial p / \partial x$.

Решение уравнения (24) имеет вид:

$$u_x(s) = C_1 J_0 \left(jr \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) + C_2 Y_0 \left(jr \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) - \frac{\wp_x(s)}{\rho s}, \quad (25)$$

где $J_0 \left(jr \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)$, $Y_0 \left(jr \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)$ – функции Бесселя нулевого порядка соответственно первого и второго рода; C_1 и C_2 – постоянные интегрирования [3].

В соответствии с законом вязкого трения

$$\tau = -\rho \nu \frac{\partial u_x}{\partial r}, \quad (26)$$

можем записать в изображениях по Лапласу следующее соотношение:

$$\tau(s) = -\rho \nu \frac{\partial u_x(s)}{\partial r}. \quad (27)$$

Продифференцировав функцию (13) по r и подставив результат в соотношение (27), получим

$$\tau(s) = -\frac{\wp_x(s)}{\rho s} \frac{j\nu \wp_x(s) \sqrt{\frac{s}{\nu}} J_1 \left(jr \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)}{s J_0 \left(jr_0 \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)}. \quad (28)$$

Чтобы найти $\tau_{OH}(s)$, достаточно в формуле (19) принять $r = r_0$. Полученное после этого выражение будет определять зависимость $\tau_{OH}(s)$ от $\wp_x(s)$. Изображение $\nu = Q / \pi r_0^2$ можно заменить изображением $\nu(s)$. Для этого выполняется преобразование по Лапласу при нулевых начальных условиях, при $r = r_0$ и с учетом соотношения (22) получена передаточная функция для касательного напряжения на стенке трубы в нестационарном потоке среды

$$W_\nu(s) = \frac{j\rho(s) J_1 \left(jr_0 \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)}{\sqrt{\frac{s}{\nu}} J_2 \left(jr_0 \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)}. \quad (29)$$

Передаточная функция (29) описывает обобщенный закон гидравлического сопротивления трения трубы при неустановившемся ламинарном течении среды.

Для упрощения решения применяем аппроксимированное уравнение. Это уравнение находится после разложения числителя и знаменателя передаточной функции (29) в степенные ряды с переходом к оригиналам $\tau_{OH}(t)$ и $\nu(t)$ [4]. Уравнение имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n \tau_{OH}(t) = \frac{2\rho\nu}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n \nu(t), \quad (30)$$

$$\text{где } D = \frac{d}{dt}; \quad a_n = \frac{r_0^{2n}}{n!(n+2)!2^{2n}v^n}; \quad b_n = \frac{r_0^{2n}}{n!(n+1)!2^{2n}v^n};$$

$$W_{v_n}(s) = \frac{4\rho v}{r_0} \left(1 + 1,5 \frac{r_0^2}{v} s + 2 \frac{r_0^4}{v^2} s^2 \right). \quad (31)$$

С добавлением уравнения (30) система уравнений (18), (19) будет замкнутой и при заданных граничных условиях полностью описывает неустановившееся ламинарное движение вязкой сжимаемой жидкости в упругой трубе. При использовании уравнения (30) число членов в его левой и правой частях должно быть ограничено в соответствии с требуемой точностью расчета. В ряде случаев достаточно взять слева и справа первые два или три члена.

Большинство реальных периодических процессов в гидросистеме могут быть представлены суммой конечного числа гармонических составляющих (гармонические колебания). При колебаниях рабочей среды в трубопроводе или в каком-либо другом напорном канале распределение скоростей течения по сечению потока отличается от закона, описывающего это распределение в случае установившегося движения среды. Так, при колебаниях ламинарного потока жидкости в круглой цилиндрической трубе нарушается параболическое распределение скоростей, которое, как известно из гидравлики, является характерным для ламинарного установившегося движения жидкости в трубе [4].

В пристенных слоях жидкости скорости течения изменяются почти синфазно с изменением градиента давления вдоль трубы, в то время как в центральной части потока скорости течения отстают по фазе от градиента давления. Изменение закона распределения местных скоростей по сечению потока при неустановившемся движении среды в трубе сопровождается изменением диссипации энергии.

Динамические характеристики однородной линии круглого сечения с упругими стенками

Динамические характеристики однородной линии круглого сечения с упругими стенками при движении вязкой сжимаемой среды можно определить с помощью уравнений (18) и (19) в частных производных, которые описывают процессы в линии с учетом распределенности параметров по ее длине. Проведя при нулевых начальных условиях одномерное преобразование по Лапласу этих уравнений и применив передаточную функцию (22), получаем

$$\left[\rho s + \frac{2W\tau v(s)}{r_0} \right] v(s) = -\frac{dp(s)}{dt}; \quad (32)$$

$$B_{TP} \frac{\partial v(s)}{\partial x} = -sp(s). \quad (33)$$

Решение системы уравнений (32) и (33) определяет для выбранного сечения линии мгновенные отклонения от установившихся значений давления и скорости среды. Каждая из этих величин будет представлять собой сумму одноименных с ней величин во фронте возмущения, распространяющегося по линии в прямом и обратном направлениях. Мгновенные отклонения давления и скорости среды, а также скорость распространения возмущения по линии зависят от свойств среды, жесткости стенок и гидравлического сопротивления линии. Влияние перечисленных

факторов на динамические характеристики линии учитывает операторный коэффициент распространения возмущений

$$\mathcal{G}(s) = \pm \sqrt{\frac{s}{B_{TP}} \left[\rho s + \frac{2W\tau v(s)}{r_0} \right]}. \quad (34)$$

Знак для $\mathcal{G}(s)$ принимают положительным, если возмущение распространяется в положительном направлении оси x . Для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси x , знак принимают отрицательным.

При гармонических колебаниях среды коэффициент распространения принимает комплексную форму:

$$\mathcal{G}(j\omega) = \pm(\delta + j\varepsilon). \quad (35)$$

Входящие в соотношение (35) величины δ и ε называют коэффициентом затухания и коэффициентом фазы соответственно. Коэффициент затухания характеризует уменьшение по длине линии амплитуды давления или амплитуды скорости среды в волне возмущения, распространяющегося по линии с фазовой скоростью $c_{\text{Л}} = \omega/\varepsilon$.

На рис. 1 показана затухающая по длине линии волна давления, распространяющегося в положительном направлении оси в моменты t_0 и $t_0 + dt$.

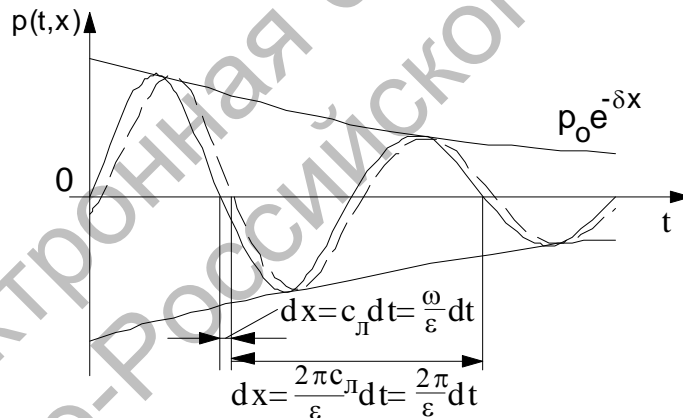


Рис. 1. Кривая изменения давления вдоль линии для двух близких моментов времени

Для вычисления величин δ и ε выполняется замена $s = j\omega$ в соотношение (34):

$$W_{\nu}(j\omega) = a + jb, \quad (36)$$

откуда $\mathcal{G}(j\omega) = \sqrt{b_1 + jb_2}$; $b_1 = -\frac{1}{B_{TP}} \left(\rho\omega^2 + \frac{2b\omega}{r_0} \right)$; $b_2 = -\frac{2a\omega}{r_0 B_{TP}}$,

откуда $\delta + j\varepsilon = \sqrt{b_1 + jb_2}$; $\delta^2 - \varepsilon^2 = b_1$; $\delta^2 + \varepsilon^2 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

Величины δ и ε определим, решив эти два уравнения, и подставив значения b_1 и b_2 , получим

$$\delta = \omega \sqrt{\frac{\rho}{B_{TP}}} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{2b}{\rho \omega r_0}\right)^2 + \frac{2a^2}{\rho^2 \omega^2 r_0^2} + \frac{2b}{\rho \omega r_0}} - 1 \right]}, \quad (37)$$

$$\varepsilon = \omega \sqrt{\frac{\rho}{B_{TP}}} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{2b}{\rho \omega r_0}\right)^2 + \frac{2a^2}{\rho^2 \omega^2 r_0^2} + \frac{2b}{\rho \omega r_0}} + 1 \right]}, \quad (38)$$

Формулы (37) и (38) показывают, что коэффициент затухания δ и коэффициент фазы ε зависят от частоты возникающих в линии колебаний, параметров линии ρ , B_{TP} , r_0 и от величин a и b . При колебаниях ламинарного потока величины a и b являются соответственно вещественной и мнимой частями амплитудно-фазовой частотной характеристики (37), поэтому

$$a = \frac{4\chi_a \rho v}{r_0}; \quad b = \frac{(\chi_p \beta - 1) \rho r_0 \omega}{2};$$

$$\chi_a = \frac{(4\bar{\omega} - \sqrt{\bar{\omega}})\bar{\omega}}{(2\sqrt{\bar{\omega}} - 1)(4\bar{\omega} - 2\sqrt{\bar{\omega}} + 1)}; \quad \chi_p \beta = \frac{4\bar{\omega}}{(4\bar{\omega} - 2\sqrt{\bar{\omega}} + 1)},$$

где χ_a , χ_p , $\bar{\omega}$ – безразмерные коэффициенты.

Подставив эти значения, а также a и b в формулы (37) и (38), находим

$$\delta = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\chi_p \beta}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{8\chi_a v}{\chi_p \beta \omega r_0^2}\right)^2} + 1; \quad (39)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\chi_p \beta}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{8\chi_a v}{\chi_p \beta \omega r_0^2}\right)^2} + 1; \quad (40)$$

$$\varepsilon = \omega \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\rho}{B_{TP}}} \quad (41)$$

Для значений $\bar{\omega} \geq 10$ формулу можно упростить, записав в следующем виде:

$$\delta = \frac{4\chi_a v}{r_0^2} \sqrt{\frac{\rho}{\chi_p \beta B_{TP}}}; \quad (42)$$

$$\varepsilon = \omega \sqrt{\frac{\chi_p \beta \rho}{B_{TP}}}. \quad (43)$$

Передаточные функции системы с распределенными параметрами

Продифференцировав уравнение (32) по x , исключив с помощью уравнения (33) производную $dv(s)/dx$, и применив соотношение (34), получим

$$\frac{\partial^2 \rho(s)}{\partial x^2} - \mathcal{G}^2(s)p(s) = 0. \quad (44)$$

Уравнение (44) имеет решение

$$\rho(s, x) = C_1 e^{\mathcal{G}(s)x} - C_2 e^{-\mathcal{G}(s)x}. \quad (45)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются граничными условиями. Пусть $x = 0$, тогда

$$\frac{\partial \rho(s, x)}{\partial x} = -\frac{\mathcal{G}^2(s)B_{TP}}{2s} v_1(s, 0); \quad (46)$$

$$C_1 = \frac{p_1(s, 0)}{2} - \frac{\mathcal{G}^2(s)B_{TP}}{2s} v_1(s, 0); \quad C_2 = \frac{p_1(s, 0)}{2} + \frac{\mathcal{G}^2(s)B_{TP}}{2s} v_1(s, 0).$$

После подстановки выражений для C_1 и C_2 решение (45) принимает вид:

$$p(s, x) = \frac{p_1(s, 0)}{2} (e^{\mathcal{G}^2(s)x} + e^{-\mathcal{G}^2(s)x}) - \frac{\mathcal{G}^2(s)B_{TP} v_1(s, 0)}{2s} (e^{\mathcal{G}^2(s)x} - e^{-\mathcal{G}^2(s)x}). \quad (47)$$

Примем длину линии равной l и обозначим изображения по Лапласу давления и скорости среды в конечном сечении линии ($x = l$) соответственно $p_2(s, l)$ и $v_2(s, l)$. Тогда при $x = l$ уравнение (47) может быть записано в виде гиперболических функций:

$$\rho_2(s, l) = p_1(s, 0) \cdot ch[\mathcal{G}(s)l] - (\mathcal{G}^2(s)B_{TP} \cdot v_1(s, 0)/s) \cdot sh[\mathcal{G}(s)l]; \quad (48)$$

$$v_2(s, l) = v_1(s, 0) \cdot ch[\mathcal{G}(s)l] - (s \cdot p_1(s, 0)/\mathcal{G}^2(s)B_{TP}) \cdot sh[\mathcal{G}(s)l]. \quad (49)$$

Заключение

Для описания гидродинамических систем с распределенными параметрами используется система уравнений (19), (31), (34), (47). Полученный математический пакет описывает систему с распределенными параметрами и выполнен, исходя из условия динамического равновесия в точке потока, с учетом зависимости от характера течения потока и физических свойств среды. Полученная методика расчета гидродинамической составляющей движения воды в системах магистральных трубопроводов носит универсальный характер и может быть использована при расчете, моделировании, оценке устойчивости гидравлических систем теплоснабжения и водоснабжения со значительной протяженностью трубопроводов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Попов, Д. Н.** Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем : учебник для вузов по специальности «Гидропневмоавтоматика и гидропривод» и «Гидравлические машины и средства автоматизации» / Д. Н. Попов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1987. – 464 с. : ил.
2. **Альтшуль, А. Д.** Гидравлика и аэродинамика : учебник для вузов / А. Д. Альтшуль, Л. Д. Животовский, Л. П. Иванов. – М. : Стройиздат, 1987. – 414 с. : ил.
3. **Бронштейн, И. Н.** Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – 13-е изд., испр. – М. : Наука, 1986. – 544 с.
4. **Попов, Д. Н.** Нестационарные гидромеханические процессы / Д. Н. Попов. – М. : Машиностроение, 1982. – 240 с.

Белорусско-Российский университет
Материал поступил 15.02.2006

N. A. Avtushenko, G. S. Lenevsky
Mathematical description of movement
of water in systems of the main pipelines,
as distributed parameter system
Belarusian-Russian University

The mathematical description of movement of water in systems of the main pipelines, based on the equation of indissolubility of environment, system of equations Navie-Stoks is considered.

The received mathematical package describes the distributed parameter system and is executed proceeding from a condition of dynamic balance in a point of a stream in view of dependence on character of current of a stream and physical properties of environment. Calculation is executed with use of functions Besselia.

Design procedure of a hydrodynamical component of movement of water in systems of the main pipelines has universal character and can be used at calculation, building models, an estimation of stability of hydraulic systems of a heat supply and water supply; procedure can be used for the description of the object of operation at construction of control systems in hydraulic parameters of the system of warm water and water supply with significant extent of pipelines.