ОТНОСИТЕЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ПОДПРОСТРАНСТВО

А.И. Калинин

Рассмотрим нестационарную сингулярно возмущенную динамическую систему

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, \quad \mu\dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, \quad t \in [t_*, t^*], \qquad (1)$$

где μ – малый положительный параметр, y – n-вектор медленных переменных, z – m-вектор быстрых переменных, $t_*,;;t^*$ – заданные моменты времени $(t_* < t^*)$.

Предполагается, что элементы матриц, формирующих систему (1), непрерывно дифференцируемы, а действительные части всех собственных значений матрицы $A_4(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, отрицательны.

Пусть H_1, H_2 – соответственно $n_1 \times n$- и $m_1 \times m$-матрицы полного ранга $(n_1 \leqslant n$, $m_1 \leqslant m)$. Говорят, что динамическая система (1) является управляемой на отрезке $[t_*, t^*]$ относительно подпространства $H_1 y = 0$, $H_2 z = 0$ [1], если для любого начального состояния $y(t_*) = y_*$, $z(t_*) = z_*$ найдется такое кусочно-непрерывное управление $u(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, что для порожденной им траектории имеет место $H_1 y(t^*, \mu) = 0$, $H_2 z(t^*, \mu) = 0$.

Наряду с системой (1) рассмотрим так называемую вырожденную систему

$$\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u,$$

где $A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$.

Теорема. *Если вырожденная система управляема на отрезке* $[t_*, t^*]$ *относительно подпространства* $H_1 y = 0$, *и выполнено условие*

$$rank(H_2 B_2(t^*), H_2 A_4(t^*) B_2(t^*), \ldots, H_2 A_4^{m-1}(t^*) B_2(t^*)) = m_1, \qquad (2)$$

то существует такое положительное число μ_0, *что при* $\mu \leqslant \mu_0$ *система (1) управляема на отрезке* $[t_*, t^*]$ *относительно подпространства* $H_1 y = 0$, $H_2 z = 0$.

Заметим, что условие (2) есть критерий управляемости на подпространство $H_2 z = 0$ стационарной системы

$$\dot{z} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u.$$

Таким образом, относительная управляемость системы (1) есть следствие относительной управляемости двух систем меньшей размерности, одна из которых является стационарной.

Утверждение теоремы в случае полной управляемости $(H_1 = E_n$, $H_2 = E_m)$ приводит к результату, доказанному в [2].

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Качественная теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1971.

2. Gicev T. R., Dontchev A. L. *Singular perturbation in optimal control problems with fixed final state* // Докл. Болгар. АН. 1978. Т. 31. № 8. С. 935–955.