О ТЕОРЕМЕ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПОЛУДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Б.С. Калитин

В докладе речь идет о развитии метода функций Ляпунова [1–3] для решения задач устойчивости компактного положительно инвариантного множества M полудинамической системы $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ [2] на произвольном метрическом пространстве X.

Представлены новые теоремы второго метода Ляпунова в форме достаточных условий неасимптотической устойчивости множества M с использованием знакопостоянных вспомогательных функций. Изучена ситуация, когда множество нулевого уровня функции Ляпунова состоит из точек покоя системы.

Определено понятие меры длины отрезка полутраектории для произвольной полудинамической системы в следующей форме.

Определение. Непрерывную функцию $\psi(x,t)$ $(\psi : X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+)$ будем называть длиной отрезка $x[0,t]$ полутраектории $\gamma^+(x)$ движения $x : t \to xt$, $x \in X$, полудинамической системы $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$, если выполняются следующие условия:

1) $\psi(x, 0) = 0$ для всех $x \in X$ (стационарность);

2) $\psi(x, t_1) - \psi(x, t_2) \geqslant d(xt_1, xt_2)$ для всех $t_1 > t_2 \geqslant 0$ (монотонность);

3) $\psi(x, t_1) = \psi(x, t_2) + \psi(xt_2, t_1 - t_2)$ для всех $t_1 > t_2 \geqslant 0$ (аддитивность).

Через $\mathbf{\Psi}$ обозначим множество всех непрерывных функций $\psi : X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющих приведенному определению.

Теорема. *Пусть X – произвольное метрическое пространство и M – компактное положительно инвариантное подмножество X. Предположим, что существуют окрестность U для M, непрерывная функция $V : U \to \mathbb{R}^+$ и функция $\psi \in \mathbf{\Psi}$, подчиненные следующим условиям:*

1) $V(x) \geqslant 0$ для $x \in U$ и $V(x) = 0$ для $x \in M$;

2) $V(xt) \leqslant V(x) - \psi(x,t)$ для $x \neq M$, $t > 0$ и $x[0,t] \subset U$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

a) если множество $Y_0 = x \in U : V(x) = 0$ не пусто, то оно состоит из точек покоя;

b) множество M устойчиво.

Известно [3], что для утверждения об устойчивости с использованием закоположительной функции Ляпунова $V(x) \geqslant 0$ требование неасимптотической устойчивости на множестве нулевого уровня функции недостаточно. А именно предполагается, что должно выполняться более жесткое условие асимптотической устойчивости или B-устойчивости. Новизна предлагаемого результата состоит в том, что выделен класс множеств M, для которых неасимптотическая устойчивость относительно множества, где $V(x) = 0$, обеспечивает устойчивость M в фазовом пространстве X.

Литература

1. Зубов В. И. *Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение)*, 2-е изд. М., 1984.

2. Сибирский К. С., Шубэ А. С. *Полудинамические системы. Топологическая теория.* Кишинев: Штиинца, 1987.

3. Калитин Б. С. *Устойчивость динамических систем (Метод знакопостоянных функций Ляпунова).* Саарбрюкен, 2013.