ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.Е. Купцова, У.П. Зараник

В развитие идеи, предложенной Б.С. Разумихиным в работах [1] и [2] для решения вопроса устойчивости решений систем с запаздывающим аргументом, предлагаются новые достаточные условия асимтотической устойчивости нулевого решения систем с запаздыванием, которые ослабляют требование отрицательной определенности производной функции в силу рассматриваемой системы.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-h)), \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$ – неизвестный n-мерный вектор, $h > 0$ – запаздывание, $f(t,x,y) = (f_1, \ldots, f_n)^\top$ – n-мерная вектор-функция, относительно которой предполагаем, что она определена и непрерывна на множестве $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$,

удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго в любой ограниченной области изменения параметров x и y. А также условию

$$f(t, 0, 0) \equiv 0,$$

которое гарантирует существование нулевого решения у системы (1).

Обозначим через $x(t, t_0, \varphi)$ – решение системы (1), удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x(t, t_0, \varphi) \equiv \varphi(t - t_0)$ при $t \in [t_0 - h, t_0]$, $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, где $PC([a,b], \mathbb{R}^n)$ это бесконечномерное пространство кусочно-непрерывных на отрезке $[a,b]$ n-мерных вектор-функций с конечным числом точек разрыва первого рода. Пусть H некоторое положительное число. Обозначим

$$\mathbb{R}^1_+ = \{t \in \mathbb{R}^1 : t \geqslant 0\}, \quad \Omega = \{(t,x) : t \in \mathbb{R}^1_+, \ \ \|x\| \leqslant H\}.$$

Рассмотрим функцию $V(t,x)$ определенную и непрерывную на множестве Ω, а также непрерывную и положительную на множестве $t \geqslant 0$ функцию $\lambda(t)$. Далее будем предполагать, что $\lambda(t) < H$.

Определение 1 Функцию $V(t,x)$ назовем отрицательно определенной на множестве $\lambda(t) \leqslant \|x\| \leqslant H$, если:

1) $V(t,x)$ непрерывна по всем своим аргументам на множестве Ω;

2) $V(t,x) \leqslant -V_1(x)$ на множестве $\lambda(t) \leqslant \|x\| \leqslant H$, где $V_1(x)$ – непрерывная на множестве $\|x\| \leqslant H$ функция такая, что $V_1(x) > 0$ для любого x такого, что $\|x\| \leqslant H$.

Теорема. *Если для системы (1) существует непрерывно-дифференцируемая на множестве Ω функция $V(t,x)$ такая, что:*

1) $V(t,x)$ положительно определена на множестве Ω и допускает бесконечно малый высший предел;

2) $\dot{V}|_{(1)} \leqslant W(t,x)$, вдоль каждой интегральной кривой системы (1), удовлетворяющей условию $V(\xi, x(\xi, t_0, \varphi)) \leqslant g(V(t, x(t, t_0, \varphi)))$ для всех $\xi \in [t-h, t)$, где функция $W(t,x)$ отрицательно определена на множестве $\lambda(t) \leqslant \|x\| \leqslant H$;

3) $g(r)$ – непрерывная, строго монотонно возрастающая на множестве $r \geqslant 0$ функция, удовлетворяющая условию $g(r) > r$ при $r > 0$;

4) $\lambda(t) \in C^0(\mathbb{R}^1_+)$, $\lambda(t) > 0$ и $\lambda(t) \to 0$ при $t \to +\infty$,

то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Замечание. Если помимо выполнения всех условий теоремы можно найти число $H_1 > \Lambda$, $H_1 < H$ такое, что

$$\sup_{\|x\|<\Lambda} V(t,x) < \inf_{\|x\|=H_1} V(t,x),$$

где $\Lambda = \max\limits_{t\geqslant 0} \lambda(t)$, то подобная картина поведения решений будет наблюдаться и при отсутствии у системы (1) нулевого решения. А именно, найдется величина $\varepsilon > 0$ такая, что при $\sup\limits_{s\in[t_0-h,t_0]} \|\varphi(s)\| < \varepsilon$ решение $x(t,t_0,\varphi)$ системы (1) будет определено на множестве $t \geqslant t_0$, и $\|x(t,t_0,\varphi)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. В этом случае говорят, что система имеет асимптотическое положение покоя. С результатами исследования вопроса существования асимптотического положения покоя у систем с запаздыванием можно ознакомиться в работах [3, 4].

Литература

1. Разумихин Б. С. *Об устойчивости систем с запаздыванием* // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20. № 4. С. 500–512.

1. Разумихин Б. С. *Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием* // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. № 6. С. 740–748.

2. Зараник У. П., Купцова С. Е., Степенко Н. А. *Достаточные условия существования асимптотического положения покоя в системах с запаздыванием* // Журн. СВМО. 2018. Т. 20. № 2. С. 175–186.

3. Купцова С. Е., Купцов С. Ю., Степенко Н. А. *О предельном поведении решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. № 2. С. 173–182.