АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БОЛЬШОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ПРОЦЕССА ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНЫХ ТЕРМИНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Л.И. Лавринович, Л.И. Гордиенко

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [0, T/\mu]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим задачу оптимального управления стационарной системой

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$Hx(T/\mu) = g, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{T/\mu} (x^T M x + u^T P u)\, dt \to \min, \tag{2}$$

где μ – малый положительных параметр, x – n-вектор, M – неотрицательно-определенная симметрическая матрица, P – положительно-определенная симметрическая матрица, $H \in R^{m\times n}$ – матрица полного ранга.

Предположение 1. Динамическая система (1) является управляемой относительно подпространства $Hx = 0$ [1].

Заметим, что это предположение эквивалентно требованию

$$\operatorname{rank}(HB, HAB, \ldots, HA^{m-1}B) = m.$$

Определение. Управление $u(t,\mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, с кусочно-непрерывными компонентами называется асимптотически субоптимальным в задаче (1), (2), если для любого натурального N имеет место

$$\lim_{\mu\to 0} \frac{J(u(\cdot,\mu)) - J(u^0(\cdot,\mu))}{\mu^N} = 0, \quad \lim_{\mu\to 0} \frac{Hx(T/\mu) - g}{\mu^N} = 0,$$

где $u^0(t,\mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, – оптимальное управление в задаче (1), (2), $x(t,\mu)$, $t \in$ $\in [0, T/\mu]$, – траектория системы (1), порожденная управлением $u(t,\mu)$, $t \in [0, T/\mu]$.

Введем в рассмотрение матрицу

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & BP^{-1}B^T \\ M & -A^T \end{pmatrix}.$$

Предположение 2. Матрица $\bar{A}$ является условно устойчивой [2], т.е. действительные части ее собственных значений отличны от нуля, причем число положительных частей равно числу отрицательных.

Теорема. *При выполнении предположений 1 и 2 управление*

$$u(t,\mu) = v_1(t) + v_2((t-T)/\mu), \quad t \in [0, T/\mu], \tag{3}$$

где $v_1(t)$, $t \in [0, +\infty]$, $v_2(s)$, $s \in [-\infty, 0]$, – соответственно решения следующих задач оптимального управления с бесконечной длительностью процесса

$$\frac{dQ_0 z}{dt} = AQ_0 z + Bv, \quad Q_0 z(0) = x_0, \quad HQ_0 z(+\infty) = 0,$$

$$J_1(v) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} ((Q_0 z)^T) M Q_0 z + v^T P v)\, dt \to \min;$$

$$\frac{d\Pi_0 z}{ds} = A\Pi_0 z + Bv, \quad H\Pi_0 z(0) = g, \quad \Pi_0 z(-\infty) = 0,$$

$$J_2(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} ((\Pi_0 z)^T) M \Pi_0 z + v^T P v)\, ds \to \min;$$

является асимптотически суботимальным в задаче (1), (2).

Задачу с конкретной длительностью процесса T_0 можно погрузить в задачу (1), (2) различными способами, выбирая T и μ так, чтобы $T/\mu = T_0$. Как видно из (4) построенное асимптотическое приближение не зависит от способа погружения. Данная работа обобщает результаты полученные в [3] для задачи оптимизации переходного процесса.

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Качественная теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1971.

2. Есипова В. А. *Асимптотика решения краевой задачи для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений условно устойчивого типа* // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 11. С. 1957–1966.

3. Лавринович Л. И. *Применение метода возмущений к линейно-квадратичной задаче оптимального управления с большой длительностью процесса* // Вестн. Белорусю гос. ун-та. Сер. 1. 2015. № 2. С. 83–88.