

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Н.Г. Абрашина-Жадаева, И.А. Тимошенко

Обсуждается класс конечно разностных схем для задач математической физики, уравнения которых включают в себя частные производные дробных порядков. Аппроксимация по времени базируется на разностном аналоге производной Герасимова–Капуто и L_1 аппроксимации. Можно указать множество подходов к определению дробной производной. Мы рассматриваем производные Герасимова Капуто.

В ограниченной области D m -мерного евклидова пространства ($m = 1, \dots, p$) с кусочно-гладкой границей Γ рассматриваем первую начально-краевую задачу для дифференциального уравнения дробными производными по времени следующего вида:

$$\partial_{0t}^\gamma u + Lu(x, t) = f(x, t), \quad x \in D, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{D},$$

$$u(x, t)|_\Gamma = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $Lu = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$ – симметричный эллиптический оператор с кусочно-глад-

кими ограниченными коэффициентами, зависящими от $x = (x_1, \dots, x_p)$:

$$a_0 \sum_{i=1}^p \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^p a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq a_1 \sum_{i=1}^p \xi_i^2, \quad a_0, a_1 = \text{const} > 0, \quad x \in \overline{D}.$$

Введем равномерные сетки

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_s = s\tau : s = \overline{0, S}\}, \quad \bar{\omega}_h = \{(x_{1_{i_1}}, \dots, x_{p_{i_p}}) : x_{r_{i_r}} = i_r h_r, \quad i_r = \overline{0, N_r}, \quad r = \overline{1, p}\}.$$

В семействе конечно разностных схем явного и неявного вида используя дискретный аналог дробной производной по времени вида

$$\partial_{0t}^\gamma u|_{t=t_s} = \frac{\tau^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{m=0}^s b_{s-m}(u^{m+1} - u^m) + O(\tau),$$

где $b_s = (s+1)^{1-\gamma} + s^{1-\gamma}$, построим конечно-разностную схему

$$\frac{\tau^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{m=0}^s b_{s-m}(u^{m+1} - u^m) = \sigma \Lambda y^{s+1} + (1-\sigma) \Lambda y^s + \varphi, \quad x \in \overline{w}_h, \quad t \in \overline{w}_\tau,$$

$$u|_\gamma = 0, \quad x \in \gamma, \quad t \in \overline{w}_\tau,$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{w}_h.$$

Справедлива следующая



Теорема. Неявная разностная схема при $\sigma = 1$ безусловна устойчива, а для погрешности метода справедлива оценка

$$\|u^s - y^s\| \leq M \left(\tau^{2-\gamma} + \sum_{r=1}^p h_r^2 \right), \quad M = \left(\frac{M_1 T^\gamma}{1-\gamma} \right)^{1/2}, \quad M_1 > 0.$$

Аналогичная теорема верна при аппроксимации Герасимова–Капуто дробной производной.

Литература

1. Самарский А. А. *Введение в теорию разностных схем*. М.: Наука, 1971.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения*. Минск: Наука и техника, 1987.
3. Langlands T., Henry B. *The accuracy and stability of an implicit method for the fractional diffusion equation* // J. Comput. Phys. 2005. V. 205. P. 719–736.
4. Абрашина–Жадаева Н. Г., Тимошенко И. А. Конечно-разностные методы для уравнения диффузии с производными дробных порядков в многомерной области // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 7. С. 819–825.

