НОВЫЕ СЕМЕЙСТВА СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

И.Е. Андрушкевич

Уравнение Кортевега–де Фриза в канонической форме имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-6u\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{1}$$

Принято считать, что оно детально изучено благодаря методу обратной задачи рассеяния [1]. Из всего множества полученных аналитических решений наибольший интерес исследователей вызывают солитонные.

Обобщенный метод Фурье разделения переменных [2, 3] позволил нам получить ряд новых семейств солитонных и солитоноподобных решений уравнения (1):

– трехпараметрический солитон

$${}^{(1)}u(x,t)=\frac{-4c_3\vartheta^4}{4c_3\vartheta^2-e^{\vartheta x-\vartheta^3 t-c_1}-4c_3^2\vartheta^4 e^{-\vartheta x+\vartheta^3 t+c_1}}; \tag{2}$$

– осциллирующий солитон (рис. 1, 2)

$${}^{(2)}u(x,t)=\left(\frac{2}{(1+i\sqrt{3})\vartheta^2}+\frac{\exp((-1+i\sqrt{3})\vartheta x/2-\vartheta^3-c_1)}{c_3(1+i\sqrt{3})^2\vartheta^4}+c_3\exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\vartheta x+\vartheta^3+c_1\right)\right)^{-1}; \tag{3}$$

– пара «солитон–осциллирующий солитон» (рис. 3, 4)

$${}^{(3)}u(x,t)=-2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln({}^{(3)}v(x,t)),\quad {}^{(3)}v(x,t)=1+c_1e^{-\vartheta_1 x+\vartheta_1^3 t}+$$

$$+c_2e^{\vartheta_2(1+i\sqrt{3})x/2+\vartheta_2^3 t}+c_1c_2\left(\frac{2\vartheta_1+\vartheta_2(1+i\sqrt{3})}{2\vartheta_1-\vartheta_2(1+i\sqrt{3})}\right)^2 e^{(-\vartheta_1+\vartheta_2(1+i\sqrt{3})/2)x+(\vartheta_1^3+\vartheta_2^3)t}. \tag{4}$$

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что обобщенный метод Фурье разделения переменных, наряду с методом обратной задачи рассеяния, является эффективным инструментом исследования нелинейных уравнений математической физики.

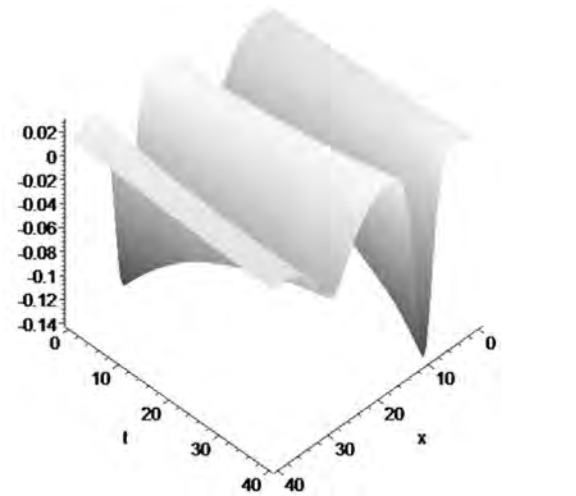

Рис. 1. Действительная часть осциллирующего солитона (3) ${}^{(2)}u(x-x_0,t-t_0)$: $c_1=0$, $\vartheta=0.3$, $x_0=20$, $t_0=20$; $0\leqslant x\leqslant 40$, $0\leqslant t\leqslant 40$.

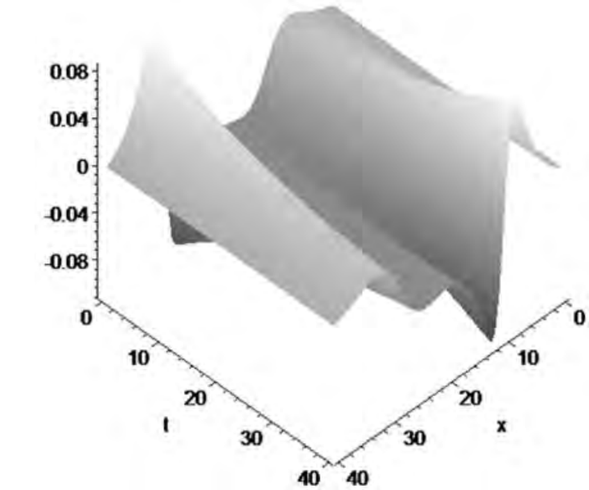

Рис. 2. Мнимая часть осциллирующего солитона (3) ${}^{(2)}u(x-x_0,t-t_0)$: $c_1=0$ $\vartheta=0.3$, $x_0=20$, $t_0=20$; $0\leqslant x\leqslant 40$, $0\leqslant t\leqslant 40$.

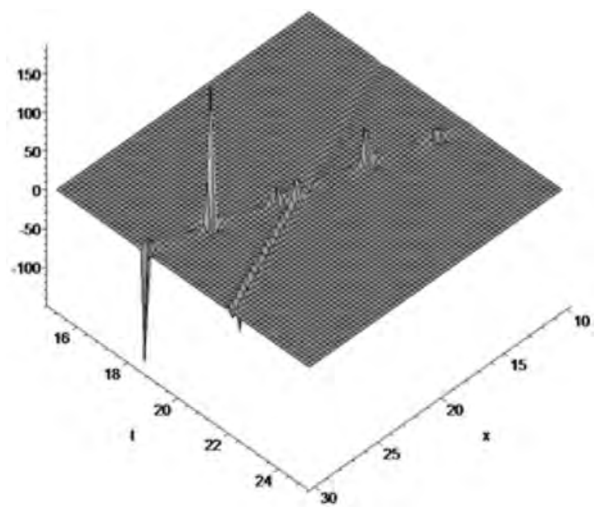

Рис. 3. Действительная часть решения (4) ${}^{(3)}u(x-x_0,t-t_0):x_0=20$, $t_0=20$; $c_1=2$, $c_2=1.05$; $\vartheta_1=2.2$, $\vartheta_2=1.8$; $10\leqslant x\leqslant 30$; $15\leqslant t\leqslant 25$.

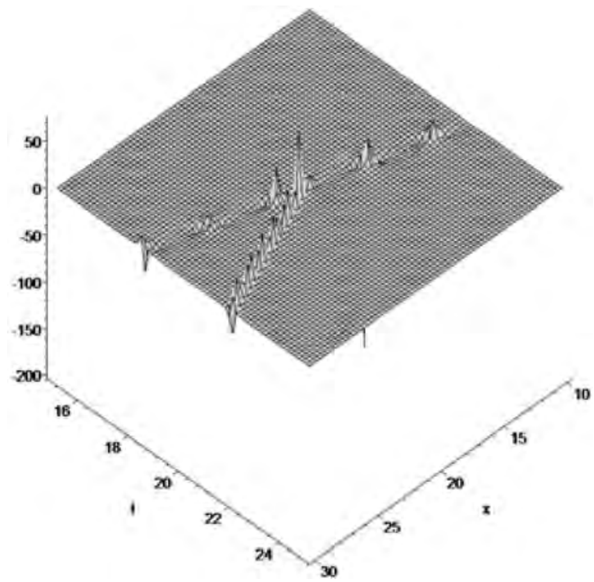

Рис. 4. Мнимая часть решения (4) ${}^{(3)}u(x-x_0,t-t_0):x_0=20$, $t_0=20$; $c_1=2$, $c_2=1.05$; $\vartheta_1=2.2$, $\vartheta_2=1.8$; $10\leqslant x\leqslant 30$; $15\leqslant t\leqslant 25$.

Литература

1. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. *Теория солитонов: метод обратной задачи.* М.: Наука, 1980.

2. Андрушкевич И. Е. *Методы разделения переменных в волновых уравнениях.* Новополоцк: ПГУ, 2010.

3. Андрушкевич И. Е. *Метод построения аналитических решений нелинейных уравнений с частными производными и алгоритм решения уравнений третьего порядка специального вида* // Информатика. 2017. Т. 56. № 4. С. 16–30.