ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ С ПОТЕНЦИАЛОМ ДИРАКА

С.Н. Барановская, Н.И. Юрчук

В полосе $Q = \mathbb{R} \times (0,T)$ рассматривается задача Коши

$$Lu(x,t) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \delta(x_i,t_i) u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad x > 0, \tag{2}$$

где $\delta(x_i,t_i)$ – функция Дирака, сосредоточенная в точках $(x_i,t_i) \in Q$, т.е. $\delta(x_i,t_i) \times \times u(x,t) = u(x_i,t_i)$, $\gamma_i \neq 0$ – вещественные числа,

$$Lv(x,t) = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{t}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, \quad \lambda > 0. \tag{3}$$

Уравнение $Lv = 0$ при $\lambda = n - 1$ называется уравнением Дарбу в монографии [1, с. 639]. В более общем случае, когда параметр $\lambda > 0$ произвольный, это уравнение называется уравнением Эйлера–Пуассона–Дарбу в работе [2]. Мы используем последнее название для уравнения (1).

Теорема. *Пусть* $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i t_i \neq -2(1+\lambda)$ *и* $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$. *Тогда существует единственное классическое решение задачи Коши (1), (2), имеющее вид*

$$u(x,t) = v(x,t) - \sum_{k=1}^{m} \gamma_k v(x_k,t_k) \Big/ \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \gamma_i t_i + 2(1+\lambda) \Big\}, \tag{4}$$

где

$$v(x,t) = \frac{\Gamma(\lambda/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((\lambda+1)/2)} \int_{-1}^{1} \varphi(x+\mu t)(1-\mu^2)^{(\lambda-2)/2}\, d\mu. \tag{5}$$

Замечание. Эта теорема справедлива и при $\lambda = 0$. В этом случае интеграл (5) вычисляется как интеграл, зависящий от двух параметров x и t, путем дважды дифференцирования по x и t. В результате получим, что функция $v(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению колебаний струны и начальным условиям вида (2), т.е. имеет вид $v(x,t) = (\varphi(x+t) + \varphi(x-t))/2$.

Литература

1. Курант Р. *Уравнения с частными производными.* М.: Мир, 1964. (Пер. с англ. *Partial Differential Equations* by R. COURANT. 1962. New York; London).

2. Weinstein A. The Generalized Radon Problem and Euler–Poisson–Darboux Equation. Institute Brasileir de Educaçãc. Ciencia e Cultura, 1955. P. 126–146.