О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Е. А. Баркова

В работе предлагаются модифицированный вариант метода, полученного в работе [1], исследования сходимости последовательных приближений для построения решений задачи Коши уравнений в частных производных смешанного типа в непрерывной шкале банаховых пространств аналитических функций.

Рассмотрим задачу

$$\partial_t^k u(t,x) = F(t,\theta(x),u(t,\theta(x)),\partial_x^m u(t,\theta(x)),\partial_x^p\partial_t^q u(t,\theta(x)),$$
$$\partial_t^\alpha u(t,\theta(x))|_{t=0} = \psi_\alpha,(\theta(x)), \quad \alpha=0,\dots,k-1,$$
$$\partial_t^\beta(\partial_x^p u(t,\theta(x)))|_{t=0} = \varphi_\beta,(\theta(x)), \quad \beta=0,\dots,q-1; \qquad (1)$$

здесь $u(t,x)$ – неизвестная функция; x – «пространственная» переменная, $\theta(x)$ – инвариантное монотонное преобразование, $\theta'(1)\neq 1$, $(\theta^{-1}(x))''\geqslant 0$, $F(t,u,y,v,w)$ – функция, непрерывная по совокупности переменных и целая по переменным u,y,v,w.

Обозначим через $\mathbb{X}(s)$ пространство всех целых функций на области

$$T_s = \bigcup_{\sigma\in|0,1|}\{x : x\in\mathbb{R}^2,\ \ |x-\sigma|\leqslant s\},$$

обладающих аналитическими продолжениями на окрестность

$$T_{s'} = \bigcup_{\sigma\in|0,1|}\{x : x\in\mathbb{R}^2,\ \ |x-\sigma|\leqslant s',\ \ s'=\theta(1+s)-1\}$$

с обычными алгебраическими операциями и нормой $\|u(x)\|_{\mathbb{X}(s')}=\sup\{|u(x)| : x\in T_s\}$. Тогда соответствующий правой части (1) оператор суперпозиции

$$f(t,u,y) = F(t,\theta(x),u(t,\theta(x)),u_x^{(m)}(t,\theta(x),y_x^{(p)}u(t,\theta(x))$$

удовлетворяет на каждом бишаре $\mathbb{B}(s',s)=\{(u,y) : \|u\|_{\mathbb{X}(s')}\leqslant r_1,\ \ \|y\|_{\mathbb{X}(s')}\leqslant r_2\}$ условию Липшица вида

$$\|f(t,u_1,y_1)-f(t,u_2,y_2)\|_{\mathbb{X}(s'')} \leqslant \frac{c(r_1)}{(s''-\theta^{-1}(1+s')+1)^m}\|u_1-u_2\|_{\mathbb{X}(s')} +$$
$$+\frac{c(r_2)}{(s''-\theta^{-1}(1+s')+1)^p}\|y_1-y_2\|_{\mathbb{X}(s')}.$$

Теорема. *Пусть* $(s',s'')\in S^*$ *– множество таких пар, для которых* $\mathbb{X}(s')\subset\subset\mathbb{X}(s'')$, *и существуют цепочки* $s_0,s_1,\dots,s_n,\dots$, *для которых* $s_0=s'$, $s_n=s''$. *Кроме того, функция*

$$h_0(t,\theta(x)) = \psi_0(\theta(x)) + \ldots + \frac{\psi_{k-1}(\theta(x))t^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^t (t-\tau)^{k-1} f\Bigg(\tau, \theta(x), \varphi_0(\theta(x)) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\varphi_{k-1}\tau^{q-1}}{(q-1)!}, \frac{\partial^m \varphi_0}{\partial x^m} + \ldots + \frac{\partial^m \varphi_{k-1}}{\partial x^m}\frac{\tau^{q-1}}{(q-1)!}, 0\Bigg)\, d\tau$$

ограничена в $\mathbb{X}(s')$*. Тогда задача (1) имеет в* $\mathbb{X}(s'')$ *по крайней мере одно решение для любого* T*.*

Литература

1. Баркова Е. А., Забрейко П. П. *Задача Коши для дифференциальных уравнений высших порядков с ухудшающими операторами* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 3. С. 472–478.

2. Петровский И. Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М., 1984.