ОБ ИНДЕКСЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $\mathbb{R}^3$

А.И. Басик, Е.В. Грицук, Т.А. Грицук

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная односвязная область, границей которой является гладкая двумерная поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. Задачу нахождения непрерывно-дифференцируемой вектор-функции $U : \Omega \mapsto \mathbb{R}^4$, удовлетворяющей в Ω эллиптической системе

$$\sum_{j=1}^{3} A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\mathfrak{B}(y)U = f(y) \quad (y \in \partial\Omega) \tag{2}$$

называют задачей Римана–Гильберта. Здесь $A_j\,(j = 1, 2, 3)$ – постоянные действительные матрицы четвертого порядка, $\mathfrak{B}$ – заданная на $\partial\Omega$ непрерывная по Гельдеру матрица размера 2×4, $f : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}^2$ заданная непрерывная по Гельдеру двухкомпонентная вектор-функция.

В статье [1] Шевченко В. И. получил условие регуляризуемости задачи Римана–Гильберта для системы Моисила-Теодореску и вычислил индекс этой задачи (краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполняется условие Я. Б. Лопатинского [2]). Позднее вопросы регуляризуемости и индекса задачи (1), (2) были решены для классов трехмерных аналогов системы Коши–Римана [3] и эллиптических кососимметрических систем в $\mathbb{R}^3$ [4].

В настоящей работе рассматривается класс эллиптических систем (1), характеристическая матрица которых имеет вид

$$\mathfrak{A}(\xi) = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 = \begin{pmatrix} \langle a;\xi\rangle & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -\xi_1 & \langle a;\xi\rangle & -\xi_3 & \xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_3 & \langle a;\xi\rangle & -\xi_1 \\ -\xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & \langle a;\xi\rangle \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $a \in \mathbb{R}^3$ – фиксированный вектор, $\langle\cdot;\cdot\rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим векторные поля

$$L(y) = (\Lambda_{12} - \Lambda_{34}, \Lambda_{13} - \Lambda_{24}, \Lambda_{14} - \Lambda_{23}),$$

$$P(y) = L(y) + [L(y); a] + a \cdot \langle L(y); a\rangle,$$

где Λ_{jk} – минор матрицы $\mathfrak{B}$ образованный ее j-м и k-м столбцами $(1 \leqslant j < k \leqslant 4)$, $[\cdot;\cdot]$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 1. *Задача (1), (2) регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке $y \in \partial\Omega$ выполняется условие*

$$\langle P(y); \nu(y)\rangle \neq 0, \tag{4}$$

где ν – единичное поле внутренних нормалей на $\partial\Omega$.

Теорема 2. *Индекс регуляризуемой задачи (1), (2) равен минус единице.*

Литература

1. Шевченко В. И. *Гомотопическая классификация задач Римана–Гильберта для голоморфного вектора* // Респ. межвед. сб. «Мат. физика». Киев, 1975. Вып. 17. С. 184–186.

2. Агранович М. С. *Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы* // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20. Вып. 5. С. 3–120.

3. Усс А. Т. *Краевая задача Римана–Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши–Римана* // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47. № 6. С. 10–15.

4. Басик А. И., Гацкевич О. А., Грицук Е. В. Вычисление индекса краевой задачи Римана–Гильберта для эллиптических кососимметрических систем в $\mathbb{R}^3$ // Весн. Брэсцкага ўн-та. Сер. 4. Фізіка, Матэматыка. 2016. № 1. С. 46–52.