ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ

Л.Н. Бондарь

В докладе рассматривается вторая краевая задача теории упругости для системы уравнений Навье [1]

$$\mathcal{L}(D_x)U = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^3_+,$$
$$\mathcal{B}(D_x)U|_{x_3=0} = 0, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{L}(D_x) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}\triangle + (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_1} & (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_1x_2} & (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_1x_3} \\ (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_1x_2} & \boldsymbol{\mu}\triangle + (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_2} & (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_2x_3} \\ (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_1x_3} & (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_2x_3} & \boldsymbol{\mu}\triangle + (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_3} \end{pmatrix},$$

$U = (U_1, U_2, U_3)^{\text{т}}$, $F = (F_1, F_2, F_3)^{\text{т}}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ – постоянные Ламе, $\boldsymbol{\mu} > 0$, $3\boldsymbol{\lambda} + 2\boldsymbol{\mu} > 0$, $\triangle$ – оператор Лапласа по x. Для второй краевой задачи оператор $\mathcal{B}(D_x)$ имеет вид

$$\mathcal{B}(D_x) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}D_{x_3} & 0 & \boldsymbol{\mu}D_{x_1} \\ 0 & \boldsymbol{\mu}D_{x_3} & \boldsymbol{\mu}D_{x_2} \\ \boldsymbol{\lambda}D_{x_1} & \boldsymbol{\lambda}D_{x_2} & (\boldsymbol{\lambda}+2\boldsymbol{\mu})D_{x_3} \end{pmatrix}.$$

Из работы [2] следует, что краевая задача (1) однозначно разрешима в $\prod_1^3 W_p^2(\mathbb{R}^3_+)$ при $p > 3$ для любых функций $F_j \in L_p(\mathbb{R}^3_+)$, $j = 1, 2, 3$. Требование $p > 3$ по существу, как показано в [3], для разрешимости рассматриваемой краевой задачи в $\prod_1^3 W_p^2(\mathbb{R}^3_+)$ при $3/2 < p \leqslant 2$ даже для функций F_j из C_0^∞, $j = 1, 2, 3$, необходимо выполнение следующих трех условий:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} F_j(x)\,dx = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Как показано в той же работе этих условий достаточно для разрешимости краевой задачи (1) в $\prod_1^3 W_p^2(\mathbb{R}^3_+)$ при $3/2 < p \leqslant 3$.

Из работы [4] следует, что для однозначной разрешимости краевой задачи (1) в $\prod_1^3 W_p^2(\mathbb{R}^3_+)$ при $1 < p \leqslant 3/2$ достаточно выполнения следующих условий

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} F_k(x)\,dx = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} x_j F_k(x)\,dx = 0, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

Нас интересует насколько эти требования близки к необходимым.

Теорема. *Предположим, что*

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))^{\text{т}} \in \prod_{j=1}^{3} C_0^\infty(\mathbb{R}^3_+).$$

Пусть $1 < p \leqslant 3/2$, тогда для разрешимости краевой задачи (1) в $\prod_1^3 W_p^2(\mathbb{R}^3_+)$ необходимо, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} F_k(x)\,dx = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

а также

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} x_1F_1(x)\,dx - \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\lambda}+2\boldsymbol{\mu}}\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} x_3F_3(x)\,dx = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} x_2F_1(x)\,dx = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} x_1F_2(x)\,dx = 0,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} x_2F_2(x)\,dx - \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\lambda}+2\boldsymbol{\mu}}\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} x_3F_3(x)\,dx = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} x_1F_3(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} x_3F_1(x)\,dx = 0,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} x_2F_3(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} x_3F_2(x)\,dx = 0.$$

Литература

1. Векуа И. Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек.* М.: Наука, 1982.

2. Demidenko G. V. *On solvability of boundary value problems for quasi-elliptic systems in* $\mathbb{R}^n_+$ // J. of Anal. and Appl. 2006. V. 4. № 1. P. 1–11.

3. Бондарь Л. Н. *Условия разрешимости краевых задач для квазиэллиптических систем в полупространстве* // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 341–350.

4. Демиденко Г. В. *Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II* // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 1. С. 41–65.