УДК 624.073.2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБА ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ С ТРЕЩИНАМИ

С. Д. СЕМЕНЮК, Р. В. КУМАШОВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

До появления трещин железобетонные конструкции могут рассчитываться как изотропные линейно-упругие либо нелинейно-упругие. После образования трещин жесткость плиты становится переменной величиной и зависит от координат рассматриваемой точки.

Положим, что после образования трещин бетон плиты в отношении своих упругих свойств обладает тремя осями симметрии, т.е. является ортотропным материалом. Если эти плоскости симметрии принять в качестве координатных плоскостей, то соотношения между компонентами напряжений и деформаций для случая плоского распределения в плоскости XY можно записать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [A] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Здесь

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Ecm} & \frac{\nu}{Ecm} & 0 \\ \frac{\nu}{Ecm} & \frac{1}{Ecm} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\cdot(1+\nu)}{Ecm} \end{bmatrix}; \quad [B] = \frac{[A]^{-1}}{Ecm} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\nu^2-1} & \frac{\nu}{\nu^2-1} & 0 \\ \frac{\nu}{\nu^2-1} & -\frac{1}{\nu^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\cdot(1+\nu)} \end{bmatrix},$$

где Ecm – модуль деформации бетона; ν – коэффициент Пуассона.

Исследуя изгиб железобетонной плиты с трещинами, предполагаем, что перпендикулярные в срединной плоскости плиты линейные элементы остаются прямыми и нормальными к изогнутой поверхности плиты после ее деформирования [1]. На основании этого можно записать следующие выражения для компонентов деформации:

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{2}$$

Соответствующие компоненты напряжений найдутся из уравнения

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = -z \cdot Ecm \cdot [B] \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \cdot \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Тогда для определения моментов, возникающих в сечении плиты, можно записать следующее:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-z_0}^{h-z_0} \sigma_x z dz = -\left(D11 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D12 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= \int_{-z_0}^{h-z_0} \sigma_y z dz = -\left(D21 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D22 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_{xy} &= \int_{-z_0}^{h-z_0} \tau_{xy} z dz = -2 \cdot D33 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь

$$D11 = \int_{-z_0}^{h-z_0} E \cdot B_{11} \cdot z^2 dz; \quad D12 = \int_{-z_0}^{h-z_0} E \cdot B_{12} \cdot z^2 dz;$$

$$D22 = \int_{-z_0}^{h-z_0} E \cdot B_{22} \cdot z^2 dz; \quad D21 = \int_{-z_0}^{h-z_0} E \cdot B_{21} \cdot z^2 dz;$$

$$D33 = \int_{-z_0}^{h-z_0} E \cdot B_{33} \cdot z^2 dz,$$

где $D11, D12, D21, D22, D33$ – жесткости плиты; h – высота плиты; z_0 – координата срединной поверхности плиты.

Дифференциальное уравнение изгиба плиты записывается в виде

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q. \qquad (5)$$

Тогда с учетом выражения (4) окончательно получаем дифференциальное уравнение изгиба железобетонной плиты с трещинами

$$\begin{aligned} & D11 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D22 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + [D12 + D21 - 4D33] \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \cdot \frac{\partial D11}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \\ & + 2 \cdot \frac{\partial D22}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left[2 \cdot \frac{\partial D12}{\partial x} - 4 \cdot \frac{\partial D33}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \left[2 \cdot \frac{\partial D21}{\partial y} - 4 \cdot \frac{\partial D33}{\partial y} \right] \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \\ & + \left[\frac{\partial^2 D11}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D21}{\partial y^2} \right] \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial^2 D22}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D12}{\partial x^2} \right] \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 4 \cdot \frac{\partial^2 D33}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -q. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тимошенко, С. П.** Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва: Физ.-мат. изд-во, 1963. – 536 с.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/