ОБ АСИМПТОТИКЕ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ ОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

С.М. Бородич

Рассматривается неавтономное гиперболическое уравнение

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - f(u) - \varphi(u,t,\varepsilon) - g(x), \quad u|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\gamma > 0$, ε – малый параметр, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi(u,t,\varepsilon)$ – класса C^1 по u и ε и непрерывна по t, $g(x) \in L_2(\Omega)$. Предполагается, что

$$\varphi(u,t,0) = 0, \tag{2}$$

$$(f(u) + \varphi(u,t,\varepsilon))u \geqslant -C, \quad f'(u) + \varphi'_u(u,t,\varepsilon) \geqslant -C,$$
$$|f'(u)| + |\varphi'_u(u,t,\varepsilon)| \leqslant C\left(1 + |u|^2\right), \quad |\varphi'_\varepsilon(u,t,\varepsilon)| \leqslant C\left(1 + |u|^3\right),$$
$$F(u) = \int_0^u f(s)\,ds \geqslant -C$$

для всех $u \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Уравнение (1) рассматривается при начальных условиях

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = p_0, \tag{3}$$

где $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $p_0 \in L_2(\Omega)$.

Пусть $E = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$. При любом ε, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, задача (1), (3) имеет, и притом единственное, решение $u(t,\varepsilon)$, для которого $(u(t,\varepsilon), \partial_t u(t,\varepsilon)) \in C([0,+\infty); E)$ (см. [1, 2]).

В силу условия (2) уравнение (1) автономно при $\varepsilon = 0$. В этом случае оно порождает в пространстве E полугруппу операторов $\{S_t, t \geqslant 0\} : S_t(u_0,p_0) = (u(t,0), \partial_t u(t,0))$.

Пусть $w = (z,0) \in E$ – стационарная точка полугруппы $\{S_t\}$. Обозначим через $M^H(w)$ совокупность всех точек $(u,p) \in E$, через которые проходят траектории $S_t(u_0,p_0)$, продолжаемые для всех $t \leqslant 0$ и удовлетворяющие условию $S_t(u_0,p_0) \to w$ в E при $t \to -\infty$.

Будем предполагать, что функция $g(x)$ является регулярным значением оператора $Av \equiv \Delta v - f(v)$, $v \in H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$. В этом случае полугруппа $\{S_t\}$ имеет конечное множество стационарных точек $\{w_1, \dots, w_N\}$ и, кроме того, множества $M^H(w_i)$ являются гладкими конечномерными многообразиями (см. [2]).

Пусть B – ограниченное в E множество, $V_\varepsilon(B)$ – совокупность всех фазовых траекторий $(u(t,\varepsilon),\partial_t u(t,\varepsilon))$ уравнения (1), выходящих в момент времени $t=0$ из точек множества B. Под *семейством составных предельных траекторий, соответствующих* $V_\varepsilon(B)$, будем понимать совокупность кусочно-непрерывных по t траекторий $(\widetilde{u}(t),\partial_t\widetilde{u}(t))$ полугруппы $\{S_t\}$, таких, что: 1) число точек разрыва $(\widetilde{u}(t),\partial_t\widetilde{u}(t))$ конечно; 2) $(\widetilde{u}(t),\partial_t\widetilde{u}(t)) = S_t(u_0,p_0)$ при $0\leqslant t<t_1$ для некоторых $(u_0,p_0)\in B$ и $t_1>0$; 3) при $t\geqslant t_1$ $(\widetilde{u}(t),\partial_t\widetilde{u}(t))$ состоит из конечного числа непрерывных кусков траекторий полугруппы $\{S_t\}$, лежащих на конечномерных многообразиях $M^H(w_i)$.

Доказана следующая теорема о стабилизации главного члена асимптотики траекторий уравнения (1).

Теорема. *Для любого ограниченного в* E *множества* B *найдутся такие малые* $\varepsilon_1>0$ *и* $q>0$ *и достаточно большое число* C_0*, что при* $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ *для любой траектории* $(u(\cdot,\varepsilon),\partial_t u(\cdot,\varepsilon))\in V_\varepsilon(B)$ *существует составная предельная траектория* $(\widetilde{u}(t),\partial_t\widetilde{u}(t))$*, такая, что* $(\widetilde{u}(0),\partial_t\widetilde{u}(0)) = (u(0,\varepsilon),\partial_t u(0,\varepsilon))$ и

$$\sup_{t\geqslant 0}\|(u(t,\varepsilon),\partial_t u(t,\varepsilon)) - (\widetilde{u}(t),\partial_t\widetilde{u}(t))\|_E \leqslant C_0|\varepsilon|^q.$$

Литература

1. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М.: Мир, 1972.
2. Бабин А. В., Вишик М. И. *Аттракторы эволюционных уравнений.* М.: Наука, 1989.